ProbleMATEMATICAmente: un'esperienza didattica in rete

Paolo Dall'Aglio[1], Daniele Gouthier[2] [3]

ABSTRACT

Presentiamo qui i primi quattro mesi dell 'attività probleMA TEMA TICAmente: un sito che propone ogni mese problemi di matematica agli studenti delle scuole superiori.

1. Descrizione dell'attività

Il progetto *Fardiconto* dell'I.R.R.S.A.E. Emilia Romagna si articola in alcune attività rivolte a docenti e studenti. Tra queste il sito *Flatlandia,* aperto nel 1997, ha l'obiettivo di proporre ogni mese un problema di geometria indirizzato agli alunni delle scuole medie inferiori e del biennio delle scuole superiori (vedi [FLA], [MAR]). Da ottobre 1999, si è dato inizio a un altro sito rivolto alle sole scuole superiori: probleMATEMATICAmente.

Il secondo venerdì di ogni mese viene pubblicato un problema di matematica all'indirizzo http://arci01.bo.cnr.itJcabri/probmat. Gli studenti sono invitati a risolverlo e a spedire via posta elettronica la soluzione entro due settimane. Possono partecipare singoli studenti, gruppi o classi intere. Dopo aver analizzato le risposte una per una, viene elaborato un commento al problema e alle soluzioni più interessanti che vengono totalmente riportate. La pagina di commento viene quindi pubblicata contemporaneamente al problema del mese successivo.

I quesiti, completi di commenti e risposte, vanno a costituire un archivio che è sempre a disposizione. Così come sono disponibili una bibliografia e i collegamenti a siti affini; fra questi non si può non citare [SWA], capostipite di questo tipo di esperienze.

I problemi vengono scelti in modo da poter essere affrontati con strumenti matèmatici vari, con bagagli culturali anche molto diversi e potrebbero sembrare difficili allo studente perché in generale non fanno riferimento a nessuna parte del programma in particolare, ma potenzialmente a tutte insieme.

Crediamo infatti che un problema debba stimolare innanzitutto la ricerca degli strumenti più adatti a risolverlo, e pertanto che sia utile offrire occasioni di ragionamento non costrette nella gabbia degli esercizi mirati a migliorare la padronanza di una tecnica specifica. Su questo aspetto entreremo in maggior dettaglio più avanti.

Va comunque sottolineato che tutte le soluzioni possono essere raggiunte con conoscenze che si acquisiscono a scuola. Non ne sono richieste di nuove.

Nell'elaborazione del commento alle risposte ricevute, si cerca di mettere in evidenza la molteplicità degli approcci e di dare ampio spazio alle soluzioni degli studenti, valorizzando quelle più interessanti. Le soluzioni vengono raggruppate a seconda della via seguita, inserendo integralmente quella più chiara e completa di ciascun gruppo. L'accento viene posto sul procedimento piuttosto che sulla risposta. Può allora capitare che vengano pubblicate, con le dovute avvertenze, risposte errate ma che contengono idee interessanti.

In generale, però, le risposte non vengono corrette o valutate. Valutare e correggere infatti non fa parte di questo progetto perché richiede un dialogo diretto.

2. Alcune considerazioni didattiche

ProbleMATEMATICAmente non è il tentativo di proporre un altro metodo di insegnamento, ma vuole essere solamente uno strumento da affiancare a quelli tradizionali. Lo studente di scuola superiore spesso è abituato a conoscere la matematica solo come sequenza di operazioni orientate all'impadronirsi di tecniche di calcolo; a volte questo avviene in maniera frammentaria al punto che ogni esercizio viene vissuto come un caso a sé, completamente avulso da un contesto generale. L'esercitazione tecnica è tutta necessaria, ma non può prescindere da un approccio più vicino al fare matematica. Sarebbe come se un pianista facesse scale ed esercizi, senza mai suonare un brano. (per una bella "sonata matematica" si veda [LAN]).

Affrontare problemi piuttosto che solamente esercizi, è di per sé un modo di ampliare e consolidare il proprio sapere: la

[1] S.I.S.S.A. Via Beirut 2/4 34014 Trieste aglio@sissa.it
[2] Laboratorio Interdisciplinare della S.I.S.S.A. Via Beirut 2/4, 34014 Trieste
[3] I.T.I. "Marconi", Via Baden Powell, 34074 Staranzano GO, gouthier@sissa.it

capacità di risolvere un problema consiste in fondo nel saper muovere dalle proprie conoscenze, riorganizzandole, alla questione che viene posta.

Se poi questi problemi sono proposti in modo indipendente da un percorso didattico, così che possano essere trattati senza riferirsi all'argomento di studio del momento il loro valore formativo e di rielaborazione delle conoscenze aumenta. Affrontare il problema, non sapere se ci sarà una risposta, quale potrebbe essere, non sapere quali strumenti si potranno usare, iniziare per tentativi, provare a considerare casi più semplici per vedere "cosa succede", porterà lo studente a individuare una tecnica risolutiva, o più di una (per molti studenti è una sorpresa scoprire che un problema può avere più di una soluzione).

Accanto alla scelta dei problemi, elemento essenziale di probleMATEMATICAmente, come delle altre esperienze citate, è il confronto tra studenti; quello interno ad una stessa classe, ovviamente fondamentale, non basta, perché gli allievi hanno ricevuto tutti la stessa formazione, hanno più o meno gli stessi strumenti e incontrano il problema tutti nello stesso momento del loro percorso. Il problema in rete, invece, sarà risolto da studenti di scuole e livelli diversi. Verranno così prodotte risposte molto varie la cui lettura è parte integrante del lavoro e serve ad aprire nuove frontiere, e a cogliere le connessioni che legano zone apparentemente lontane della matematica.

L'essere in rete ha altri due aspetti positivi. Internet ha una dimensione ludica e offre un approccio che, soprattutto da un punto di vista psicologico, lo studente sente come diverso dalla scuola, lontano da questa. Pertanto un problema trovato in rete stimola un interesse che un problema proposto in classe non genera più. Il secondo aspetto è la facilità con la q~le in rete si può raggiungere un ampia offerta didattica prodotta da istituti e istituzioni, in Italia e all'estero, da insegnanti e da battitori liberi, da università e da centri privati.

3. I primi quattro mesi

Al momento in cui scriviamo sono stati completati quattro mesi di lavoro. Non siamo pertanto in possesso di dati sufficienti per fare un vero e proprio bilancio, ma possiamo proporre alcune considerazioni.

Complessivamente sono arrivate 48 risposte, spedite da studenti di Il licei scientifici, 5 istituti tecnici industriali e un liceo sociopsicopedagogico. Le classi che hanno partecipato sono prevalentemente quinte (12 terze, 11 quarte, 21 quinte). Solo in due casi è pervenuta la risposta elaborata da tutta una classe. Due persone hanno risposto a tutti i problemi e altre due a tre problemi su quattro. E' difficile, oggi, dire se ci siano professori che sistematicamente propongono il problema in classe o se, piuttosto, prevalga la scelta del singolo studente di svolgere il problema come attività totalmente extra scolastica.

Qualcuno dei primi partecipanti – a ottobre – ha proposto la sola risposta senza completarla, con un procedimento, Ma questo, dopo gli opportuni chiarimenti, non è più successo, Gli elaborati hanno in genere un buon livello di approfondimento e di dettaglio, inoltre, col passare del tempo, aumenta il numero di persone che. sottopongono più di una soluzione per un singolo problema, opportunità che in probleMATEMATICAmente viene sempre sottolineata e valorizzata.[4] Ci sembra pertanto di poter dire che i partecipanti leggano le pagine delle soluzioni, completando in questo modo il ciclo: lettura del problema-soluzione-invio-Iettura del commento.

Nella scelta dei testi si è cercato di selezionare problemi di ambiti diversi: uno sui polinomi, due di geometria e uno sulle funzioni; quello di febbraio è un problema di teoria dei numeri. In questo modo non si privilegia alcun ambito conoscitivo e si mostra che problemi anche molto diversi possono, comunque, essere affrontati con numerosi procedimenti qualitativamente differenti. Infatti è da notare che le soluzioni ricevute hanno offerto una molteplicità di spunti eterogenei. Il problema di novembre, ad esempio, ha avuto soluzioni che possono essere suddivise in nove gruppi che seguono approcci interessanti e alternativi. Il numero delle risposte è stato abbastanza costante.

Per quanto riguarda la pubblicazione delle soluzioni e i relativi commenti, è interessante osservare che la dinamica dell'attività toglie, agli studenti, l'ansia della valutazione. Riteniamo che il commento venga visto come un'occasione di ragionamento e di apprendimento e non come una valorizzazione dei bravi a scapito dei meno bravi, e che le risposte raccolte contribuiscano a dare elementi di approfondimento per tutti.

Sinora sono pervenuti pochi commenti sul lavoro svolto: nessuna rimostranza sulle soluzioni pubblicate o sulle scelte effettuate nella selezione, poche richieste di problemi più difficili, qualche parere positivo.

3.1 Un esempio

Per concludere consideriamo, a titolo di esempio il problema di dicembre che chiedeva di provare se, date tre rette parallele, esiste un triangolo equilatero con un vertice su ciascuna delle tre rette.[5] Il problema è stato scelto anche perché offriva diversi possibili approcci; infatti le IO risposte pervenute sono riconducibili a quattro metodi risolutivi distinti.

Bisogna notare che alcuni studenti non hanno colto il nodo centrale della questione, vale a dire l'esistenza o meno della

[4] I dati completi sono disponibili nell'archivio del sito.

[5] Problema tratto da [SNS].

soluzione. Abbiamo infatti letto esposizioni che arrivano a un'espressione esplicita degli elementi del triangolo, queste espressioni, però, dipendono da uno o più parametri e non viene studiato se questi parametri possono assumere tutti i valori o solo alcuni.

Il primo approccio (adottato da tre studenti) è di tipo analitico. Si sceglie un riferimento cartesiano nel quale rappresentare le tre rette e si impone che i punti sulle tre rette siano tra loro equidistanti. Il limite di questo procedimento è che non si riescono ad evitare lunghi calcoli che richiedono tempo e rigore e quindi qualche soluzione risulta incompleta. Alcune soluzioni, comunque, erano scritte con precisione di linguaggio e senza trascurare i dettagli.

Il secondo approccio sfrutta la trigonometria: scegliendo come parametro l'angolo che un lato del triangolo forma con le rette si calcola esplicitamente la sua dipendenza dalla posizione relativa della retta di mezzo. Questa via è stata seguita da cinque partecipanti. .

La ricerca di una costruzione esplicita del triangolo è stata adottata da due persone. Qui si è presentato il caso interessante di due studenti che hanno utilizzato Cabri-Géometre per provare che il luogo di certi punti è una retta. A partire da questo hanno dimostrato facilmente l'esistenza del triangolo in questione. Teoricamente la validità del ragionamenti potrebbe dipendere da come funziona il software, ma da un punto di vista didattico si è preferito sottolineare che è sempre necessario fornire una dimostrazione esplicita. L'altra costruzione presentata era errata ma conteneva l'idea geometrica più semplice e interessante. Pertanto è stata inserita con le dovute correzioni.

L'ultimo tipo di soluzione (sviluppato da un unico studente) tratta il triangolo equilatero come un corpo rigido che ruota trascinandosi dietro le tre rette, con un'idea dinamica della geometria di questo problema.

Nessuno degli studenti si è posto la questione (intenzionalmente non esplicitata nel testo) se le tre rette fossero da considerarsi nello spazio anziché nel piano. La questione è stata lasciata aperta.

Solo quando le soluzioni degli studenti sono troppo poche, o tutte dello stesso tipo, si provvede a proporre ulteriori risposte. Per questo problema, come quasi sempre, sono state pubblicate solo soluzioni inviate dagli studenti.

4. Conclusioni

Questa breve fase iniziale conferma l'impressione, già valida per le esperienze precedenti, che il metodo, ideato come già detto negli Stati Uniti, sia molto adatto a stimolare l'interesse degli studenti, e che a questo scopo sia congeniale la scelta di veri e propri problemi, anziché di eserCIZI.

Naturalmente sarebbe interessante riuscire ad ampliare la partecipazione, specialmente nell'Italia del Sud. Anche una maggiore ftequenza, o una più ampia scelta, dei problemi potrebbe essere un obbiettivo da perseguire per il futuro.

Alla fme dell'anno scolastico si potranno fare considerazioni più organiche, eventualmente anche tramite un questionario sui vari aspetti della partecipazione da parte di studenti, insegnanti e scuole. L'IRRSAE ER curerà, come già per Flatlandia, l'edizione di tutti i problemi con le relative soluzioni, nell'ambito dei "Quaderni di CABRIRRSAE".

Bibliografia

[ARP] A. Arpinati, *Matematica* e *multimedialità,* Bollettino Mathesis, Sezione di Catania 3 (1998).
[SNS] AA.VV., *I problemi di matematica della Scuola Normale Superiore di Pisa,* Boringhieri, 1985.
[SWA] AA.VV., *The Problem ofthe Week,* http://forum.swarthmore.edul.
[FLA] G. Bettini, C. Pellegrino, F. Noè, *Flatlandia,* IRRSAE-ER, http://arci01.bo.cnr.it/cabri/flatlandiai.
[KRA] S.G. Krantz, *Tèchniques ofproblem solving,* AMS, 1997.
[LAN] S. Lang, *La bellezza della matematica,* Boringhieri, 1991.
[LAR] L.C. Larson, *Problem solving throughproblems,* Springer-VerIag, 1983.
[MAR] G. Margiotta, *Problemi in rete: un gioco da ragazzi (un'attività per motivare, per ragionare, per discutere),* in Atti del XIX Convegno nazionale UMl-CIIM "Apprendere la matematica: errori, difficoltà, conquiste", Vicenza 1997, a cura di G. Anichini e B. D'Amore, Edizioni UMI, 1998.