

Ambiguità e definizione, amiche nell'analogia

danielegouthier

Prendiamo una classe quinta di un istituto industriale e decidiamo di spiegare cos'è uno spazio topologico. Naturalmente, io non voglio farlo, mi basta limitarmi all'esperimento mentale.

Su un libro di topologia, potrei leggere una definizione di spazio topologico T che parte da una famiglia U di sottoinsiemi e dalle proprietà che questa famiglia deve avere: contenere l'insieme vuoto, l'insieme T e tutte le unioni (anche infinite) e le intersezioni finite di suoi elementi ... poi leggerei che la famiglia si chiama topologia, i sottoinsiemi che le appartengono si chiamano aperti e lo spazio T , associato alla topologia (T, U) , è lo spazio topologico.

Potrei, ma non lo farei né per me né davanti alla classe.

Quello che farei invece è cercare di ricorrere a concetti e idee che ho già, che hanno già i ragazzi, prendendoli così come sono, senza una definizione rigorosa, ma soltanto come i termini di un'analogia che mi serve a comunicare la nuova idea alla quale voglio che la mia classe arrivi.

Ecco allora che parlo di retta reale – che invero è un esempio piuttosto elementare di spazio topologico – e punto l'attenzione ai suoi intervalli aperti, o meglio ancora all'unione di intervalli aperti e mostro che la famiglia delle unioni degli intervalli aperti ha certe proprietà che poi in definitiva sono quelle dette sopra.

La spiegazione, *naturalmente*, muove da qualcosa di consolidato già da un paio d'anni nell'educazione matematica dei ragazzi e va nella direzione di un concetto astrattissimo, lontano dalla loro esperienza, non solo umana ma anche matematica.

Fine dell'esperimento mentale.

Domanda: perché siamo autorizzati a comportarci così?

A prima vista diremmo di *non* essere autorizzati: in fondo in matematica il linguaggio ha un comportamento molto peculiare. Da pochi basilari assiomi, possiamo muoverci di teorema in teorema, appoggiandoci al minor numero di definizioni possibili. La matematica è fedelissima al cosiddetto rasoio di Occam che limita al massimo gli enti su cui ragionare – vale a dire gli enti che meritano di essere definiti:

Non moltiplicare gli elementi più del necessario.

Non considerare la pluralità se non è necessario.

È inutile fare con più quanto si può fare con meno.

Quindi sembrerebbe che dagli assiomi tutto discende in modo rigoroso e senza possibilità di scarti o visioni laterali. Ma è vero?

Il fisico tedesco Werner Heisenberg¹ riconosce che le parole, tutte le parole, anche quelle matematiche, sono ambigue, incerte. E afferma:

"Questa intrinseca incertezza del significato delle parole è stata naturalmente riconosciuta assai presto e ha portato alla necessità delle definizioni, o – come indica la parola 'definizione' – a stabilire dei limiti che determinino dove la parola può essere usata e dove no. Ma le definizioni possono venir date solo con l'aiuto di altri concetti e così in definitiva è necessario appoggiarsi ad alcuni concetti che sono presi come sono, non analizzati e non definiti".

Ed è proprio per questo che la natura ambigua delle parole è imprescindibile e che in fondo in fondo ragioniamo e parliamo per analogia. Il ruolo che Heisenberg propone di dare alla definizione serve a prendere atto dell'ambiguità e quindi adottare strategie per limitarne i possibili pericoli. Ma al tempo stesso permette anche di ammettere il ragionamento – o almeno la comprensione di un'idea – per analogia.

Ogni definizione definisce un ente. Ma questa definizione, anche senza scomodare Gödel, è sempre una definizione che fissa i limiti che determinano dove il vocabolo può essere usato, e non possiamo però dimenticare che questi limiti sono relativi e non hanno valore assoluto.

Prendiamo un altro esempio, quello della somma. In matematica vengono definite alcune diverse somme: la somma di numeri e quella di vettori; la somma di funzioni e quella di spazi vettoriali; la somma di angoli e quella di segmenti ... va da sé che ciascuna di queste *somme* ha il proprio ben definito significato solo in un certo contesto che di volta in volta è l'aritmetica o l'algebra, la geometria piana o lo studio delle funzioni. I termini matematicamente definiti portano con sé i limiti della regione nella quale questa definizione vale. E questo proprio perché l'ambiguità delle parole è ineliminabile.

Ineliminabile però non vuol dire che non se ne possano limitare i pericoli.

Il principale principio che usiamo per attenuare "*l'intrinseca incertezza del significato*" è proprio data dall'analogia. Quando introduciamo man mano nuovi contesti matematici e questi ci portano ad aver bisogno di nuove somme, nel definirle stiamo attenti a che il comportamento, per esempio, della somma di angoli sia coerente – per analogia! – col comportamento della somma di numeri. Ed è per questo, e non solo per scelta di nomi, che le due somme, e tutte le altre, sono effettivamente delle somme. Nella natura degli angoli, degli spazi vettoriali, dei segmenti, dei vettori, delle funzioni e, prima di tutti dei numeri, c'è una qualità comune, analoga, che è la *sommabilità*.

Allora, se dovessi veramente spiegare a una classe quinta dell'istituto tecnico cos'è uno spazio topologico, potrei – io direi: dovrei – ricorrere all'analogia con contesti conosciuti e sedimentati. Non solo perché questi sono casi particolari, magari notevoli come la retta reale. Ma perché contengono in sé, inespresa, l'idea di una topologia. Ed è meglio cercare un'idea nuova là dove ci orientiamo e ci muoviamo con più tranquillità.

E quest'atteggiamento è tanto più onesto intellettualmente quanto sappiamo che "*in definitiva è [sempre] necessario appoggiarsi ad alcuni concetti che sono presi come sono, non analizzati e non*

¹ W. Heisenberg, *Fisica e filosofia*, il Saggiatore, Milano 1961, p. 198.

definiti". Vale a dire che possiamo fare matematica solo puntellandoci con idee e concetti che sono esterni alla matematica.

E ancora: quest'atteggiamento è proficuo perché presuppone l'abitudine a ragionare per analogia all'interno stesso della matematica. E senza scomodare gli spazi topologici è bene che tutti i ragazzi prima o poi sperimentino la forza dell'analogia guardando la moltiplicazione dei numeri pari e di quelli dispari; la moltiplicazione di 0 e 1; e quella di + e -.

	P	D
P	P	P
D	P	D

	0	1
0	0	0
1	0	1

	+	-
+	+	+
-	+	-

È sufficiente una sola idea per spiegare tre concetti.