Daniele Gouthier

ALCUNE DELLE MILLE SFACCETTATURE DI PI GRECO

(marzo 2016)

[1]

[1] Apparso in Invito alla natura, nella rubrica 5 minuti di matematica

In occasione del Pi Day 2016, eccovi uno speciale in sei tappe sul pi greco. Cominciamo con la poesia – da gustare verso a verso – che Wislawa Szymborska gli ha dedicato. Proseguiamo con la sua carta d'identità e con un rapido percorso nella storia, con i contributi di venticinque secoli di matematici. Ci spostiamo poi sul tecnico: prima dimostrando perché pi greco lega tanto la lunghezza della circonferenza e il raggio quanto l'area del cerchio e il quadrato del raggio; poi calcolandone un'approssimazione con Excel. Per concludere, alcuni consigli di lettura.

Pi greco
È degno di ammirazione il Pi greco
tre virgola uno quattro uno.
Anche tutte le sue cifre successive sono iniziali, cinque nove due, poiché non finisce mai.
Non si lascia abbracciare sei cinque tre cinque dallo sguardo,
otto nove, dal calcolo, sette nove dall'immaginazione,
e nemmeno tre due tre otto dallo scherzo,
ossia dal paragone quattro sei con qualsiasi cosa due sei quattro tre al mondo.
Il serpente più lungo della terra dopo vari metri si interrompe.
Lo stesso, anche se un po' dopo, fanno i serpenti delle fiabe.
Il corteo di cifre che compongono il Pi greco non si ferma sul bordo della pagina,
È capace di srotolarsi sul tavolo, nell'aria, attraverso il muro, la foglia, il nido, le nuvole,
diritto fino al cielo, per quanto è gonfio e senza fondo il cielo.
Quanto è corta la treccia della cometa, proprio un codino!
Com'è tenue il raggio della stella, che si curva a ogni spazio!
E invece qui due tre quindici trecentodiciannove il mio numero di telefono

Current Address : via Puccini, 26 – 34078 Sagrado GO (Italy) Phone +39 3338189121 Skype: gouthier.daniele

il tuo numero di collo l'anno millenovecentosettantatré sesto piano
il numero degli inquilini sessantacinque centesimi la misura dei fianchi due dita
sciarada e cifra in cui vola e canta usignolo mio oppure si prega di mantenere la calma,
e anche la terra e il cielo passeranno,
ma non il Pi greco,
oh no, niente da fare,
esso sta lì con il suo cinque ancora passabile,
un otto niente male, un sette non ultimo,
incitando, ah, incitando
l'indolente eternità a durare.

Wislawa Szymborska

La carta d'identità di Pi greco

Il π, ovvero pi greco, inizia così 3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209 74944 59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679… e non finisce mai.

È un numero decimale, illimitato e non periodico. Quindi è irrazionale (a dire il vero è anche trascendente ma non è detto che in queste poche righe dobbiamo capire anche questo).

Decimale significa che "si scrive con la virgola".

Illimitato vuol dire che non finisce mai.

Periodici sono quei numeri che, non finendo mai, hanno dei blocchi di cifre che si ripetono sempre uguali. Pi greco non è periodico: ogni cifra è una sorpresa.

Current Address : via Puccini, 26 – 34078 Sagrado GO (Italy) Phone +39 3338189121 Skype: gouthier.daniele

Attenzione! Ci sono numeri decimali non periodici che sono molto meno sorprendenti.

Facciamo solo due esempi:

1,234567891011121314151617181920…

0,100100010000100000100…

Pi greco è di tutt'altra pasta: se guardiamo un primo tratto della sua parte decimale non siamo in grado di capire che cosa succederà dopo.

E poi ha un'altra sorprendente proprietà: pensate un numero, qualsiasi, lungo tanto quanto volete. Ebbene questo numero da qualche parte nello sviluppo decimale di pi greco c'è. Badate, quando dico qualsiasi, intendo qualsiasi. Potrebbe sembrarvi strano ma ad esempio 1 seguito da un miliardo di 0 nello sviluppo decimale di pi greco c'è.

Nella storia della matematica, sono state trovate molte espressioni per scrivere pi greco.

Se moltiplicate per 4 la somma a segni alterni

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

ottenete un'approssimazione di pi greco.

Lo stesso succede moltiplicando per 8

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 7} + \frac{1}{9\cdot 11} + \frac{1}{13\cdot 15} + \frac{1}{17\cdot 19} + \cdots$$

O anche aggiungendo 3 a

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{1}{2\cdot 3\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 7} - \frac{1}{4\cdot 5\cdot 9} + \cdots$$

Mentre il prodotto

$$2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \cdot \ldots$$

è proprio pi greco.

Le espressioni che abbiamo presentato qui sopra si concludono tutte con dei puntini di sospensione: questo sta a significare che l'espressione esatta è formata da infinite operazioni. Se ci fermiamo a un certo punto quella che otteniamo è una, più o meno buona, approssimazione di pi greco.

Tutto ciò però non è così utile dal punto di vista pratico.

Normalmente, per gli scopi quotidiani, confondiamo pi greco con il suo troncamento alla seconda cifra decimale 3,14.

Ci accontentiamo cioè di un'approssimazione corretta al 99,94930%: molto buona.

Però con un poca fatica in più possiamo fare molto meglio: la radice quadrata di 9,87 è una sua approssimazione al 99,998%.

E la somma $\frac{\sqrt{2}}{10} + 3$ dà un'approssimazione esatta addirittura al 99,99455%.

A volte un piccolo sforzo può dare grandi risultati!

Prima di chiudere con le espressioni di pi greco, torniamo sull'aggettivo "trascendente".

Che cosa significa?

Current Address : via Puccini, 26 – 34078 Sagrado GO (Italy) Phone +39 3338189121 Skype: gouthier.daniele

Significa esattamente che se vogliamo scrivere pi greco come un’espressione algebrica di numeri razionali… non possiamo farlo. Non bastano addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni, divisioni, elevamenti a potenza ed estrazioni di radice per descrivere esattamente pi greco.

Tutto quello che possiamo ottenere sono, come qui sopra, delle buone approssimazioni.

Se vogliamo usare le operazioni elementari e ottenere un’espressione esatta di pi greco con i soli numeri naturali, ebbene dobbiamo rassegnarci a fare infinite operazioni.

Oltre venticinque secoli di storia

Da millenni l’uomo ha osservato che al crescere del raggio, la circonferenza cresce in proporzione. E che quindi c’era una costante che li legava: pi greco.

Naturalmente saranno state fatte molte sperimentazioni con cerchi e corde. Ma questo non bastava… c’era la curiosità di capire quanto valesse veramente pi greco.

Nel papiro di Rhind, lo scriba Ahmes, 1650 aC, attribuisce a pi greco il valore $\left(\frac{16}{9}\right)^2$, ma questa stima, per altro esatta a meno dell’1%, non ebbe gran diffusione: mille anni dopo abbiamo ancora testimonianza che babilonesi ed ebrei usavano come valore di pi greco il numero 3, che è il valore che troviamo anche nell’*Antico Testamento*.

Nel IV secolo aC, i greci diedero un’importante accelerazione allo studio del “loro” pi: iniziarono ad analizzare l’area dei poligoni regolari inscritti e di quelli circoscritti e a calcolarne il rapporto con quella del cerchio. È un cambiamento radicale.

Non basta più sperimentare – con oggetti fisici o con la mente – ora si passa a pensare in modo razionale – con quelle che presto saranno vere e proprie dimostrazioni.

Su questa via, il contributo più significativo avvenne due secoli dopo, con Archimede che propose ragionamenti analoghi lavorando con i perimetri invece che con le aree.

Passano ancora cent'anni e Tolomeo (quello del sistema tolemaico, per intenderci) propone una stima esatta a meno dello 0,003%: fissa il valore di pi greco in $3+\frac{8}{60}+\frac{30}{3600}$.

Attenzione! Anche se le conoscenze matematiche avanzavano, nei secoli per gli scopi pratici, c'è chi si è accontentato di valori meno esatti ma più comodi per i calcoli: nel IV secolo dC abbiamo documenti che attestano che i romani usassero come valore $3+\frac{1}{8}$.

Nel frattempo, in Cina, prende piede un'espressione non esattissima ma molto diversa. Dal II secolo dC, il valore di pi greco che si diffonde è $\sqrt{10}$, non precisissimo ma piuttosto facile da ricordare. La strada di cercare un'espressione che fosse una radice quadrata venne battuta in modo particolarmente felice dai matematici indiani: Aryabatha e Brahamagupta migliorarono sempre di più il dato cinese, con radici di decimali di 9, meno facili da ricordare ma, dimostrazione dopo dimostrazione, sempre più esatti.

Nel IX secolo, ecco a voi i matematici arabi (i quali, tre secoli dopo, influenzarono moltissimo il pensiero e l'opera del nostro Leonardo Pisano, detto il Fibonacci). È con loro che fa la sua comparsa in Occidente lo 0 e che le notazioni per i numeri divengono più simili a quelle moderne. E, si sa, scrivere bene vuol dire pensare bene: così in quei secoli le approssimazioni andarono migliorando.

Attenzione! Nelle righe precedenti ho scritto spesso "approssimazione": l'idea che quelle espressioni approssimassero il valore esatto di pi greco non era però di tutti quei matematici. I greci capirono che pi greco non era un numero razionale e che con le frazioni potevano solo accontentarsi di un'approssimazione. Molti altri matematici – ad esempio quanti trovarono espressioni con le radici – pensavano di poter averne il valore esatto. Si sbagliavano.

Torniamo a Fibonacci: nel 1220 propose il valore $\frac{864}{275}$. Gli costò un grande sforzo ma, in definitiva, fu un miglioramento solo 0,0001 più preciso del dato di Archimede.

Fu il francese Francois Viete alla fine del Sedicesimo secolo a cambiare totalmente approccio e a iniziare a proporre, per descrivere pi greco, espressioni che fossero prodotti infiniti: in nuce comincia a emergere l'idea che pi greco sia un numero trascendente, cioè non esprimibile con una quantità finita di operazioni elementari che coinvolgano solo numeri razionali.

Più o meno in contemporanea il tedesco Ludolph van Ceulen tornò sullo stesso metodo di Archimede, solo che riuscì ad applicarlo a poligono con più di 32 miliardi di lati: questo sforzo enorme gli fece conoscere le prime 35 cifre dello sviluppo decimale di pi greco!

I tre secoli che ci separano da Viete e van Ceulen sono stati i più fertili, felici e tumultuosi della storia del pensiero matematico. Pi greco non è stato immune da questo scoppiettante fuoco d'artificio di idee e intuizioni. Oggi ne conosciamo oltre 2.000.000.000.000.000 di cifre. Ma soprattutto dal 1882 abbiamo la dimostrazione di un altro tedesco, il matematico Ferdinand von Lindemann, che prova che pi greco è un numero trascendente.

Oggi l'indagine per trovare nuove cifre di pi greco e per studiarne le "regolarità" è uno dei campi su cui si testa la potenza e l'efficienza dei supercalcolatori. E molto c'è ancora da capire di queste regolarità.

Non sono molti i concetti noti all'uomo che sono studiati con profitto da oltre venticinque secoli. Non sono molti i problemi noti agli antichi che sono ancora oggi stimolanti e fertili. Pi greco lo è.

Circonferenza, cerchio e pi greco

Tutti i cerchi sono simili tra loro: basta traslare i centri in modo che coincidano e poi con un'omotetia un cerchio si sovrappone all'altro.

Per similitudine, il rapporto tra la lunghezza della circonferenza e il raggio è costante: $\frac{C(r)}{r} = costante$. E per lo stesso motivo è costante il rapporto tra l'area del cerchio e il quadrato del raggio: $\frac{A(r)}{r^2} = costante$.

Ora dimostreremo che queste costanti non sono qualsiasi, ma sono legate tra loro da una relazione elementare: l'una è il doppio dell'altra.

Il primo passo è dare una definizione: chiamiamo 2π la prima delle due costanti. Ovvero scriviamo $\frac{C(r)}{r} = 2\pi$.

Attenzione! Non abbiamo fatto altro che dare un nome a una delle due costanti. Abbiamo chiamato π la metà del rapporto tra circonferenza e raggio, ovvero il rapporto tra circonferenza e diametro.

Prima di spostare la nostra attenzione sull'area del cerchio e sulla costante che la lega al quadrato del raggio, ricordiamoci un fatto generale valido per tutti i poligoni regolari.

Il raggio di un poligono regolare è il raggio r del cerchio inscritto.

L'area di un poligono regolare è, sempre, il prodotto tra il semiperimetro, p, e questo raggio.

Se indichiamo con $2p_n$ il perimetro e con A_n l'area dell'n-agono regolare e con r il raggio del cerchio inscritto, la relazione che li lega è $A_n=p_nr$.

Adesso scegliamo un particolare cerchio, quello di raggio 1, r=1. Allora per tutti i poligoni regolari a esso circoscritti abbiamo che il valore dell'area è lo stesso di quello del semiperimetro $A_n=p_n$.

Man mano che aumenta il numero di lati n, il perimetro $2p_n$ approssima sempre meglio la lunghezza della circonferenza C, e l'area A_n approssima sempre meglio quella del cerchio A.

Allora l'area del cerchio di raggio 1 ha lo stesso valore della semicirconferenza. E quindi $\frac{A(r)}{r^2} = A(1) = \pi$.

E con questo abbiamo mostrato che la relazione tra le due costanti.

$$C=2\pi r \qquad\qquad A=\pi r^2$$

Current Address : via Puccini, 26 – 34078 Sagrado GO (Italy) Phone +39 3338189121 Skype: gouthier.daniele

Calcoliamo pi greco con Excel

Se vogliamo fare un piccolo esperimento con il foglio di calcolo, possiamo cercare di trovare una nostra approssimazione di pi greco.

Ecco come possiamo fare.

Nella riga 1, compiliamo le celle con queste intestazioni.

	A	B	C	D	E	F
1	0	x	y	$x^2+y^2<1$	0	π

La colonna A è un contatore che conta le righe.

La B contiene l'ascissa di un punto nel primo quadrante.

La C contiene l'ordinata dello stesso punto nel primo quadrante.

La D ci dice se il punto (x;y) sta o meno nel cerchio di raggio 1 e centro nell'origine.

La E è un contatore di quanti punti stanno nel cerchio.

La F è il quadruplo del rapporto tra i due contatori e approssima pi greco.

Vediamo le formule per esprimere questi fatti nella riga 2.

	A	B	C	D	E	F
1	0	x	y	$x^2+y^2<1$	0	π
2	=A1+1	=casuale()	=casuale()	=SE(B2^2+C2^2<1;1;0)	=E1+D2	=4*E2/A2

Ora copiamo la riga 2 tante volte quante vogliamo.

Facciamolo almeno con qualche centinaia di righe.

L'ultimo valore nella colonna F sarà una tua approssimazione di pi greco.

Qualche lettura per saperne di più

David Blatner ha scritto, e pubblicato in Italia per Garzanti, *Le gioie del π*, un volumetto curioso, agile e ricco di storia e di informazioni.

Serge Lang, *La bellezza della matematica*, Bollati Boringhieri, è un libro che contiene quattro imperdibili conversazioni sulla matematica: una di queste è su pi greco.

Facile come π? è l'introduzione alla matematica superiore scritta da Oleg Aleksandrovic Ivanov (edito da Bollati Boinghieri). Richiede qualche sforzo ma è una lettura sempre arricchente.

Di tutt'altro genere e di tutt'altra leggibilità è il romanzo *La chioma di Berenice* (Longanesi) dello scrittore e matematico Denis Guedj. Una vicenda avventurosa – in tutti i sensi – che vede pi greco come elemento essenziale.

Cerchi di Catherine Sheldrick Ross (Editoriale Scienza) è un libro per fare matematica che può benissimo finire in mano a uno studente della scuola secondaria di primo grado.

Lo stesso editore, per lo stesso pubblico, ha anche edito *Tutti in festa con Pi Greco* della valente divulgatrice Anna Cerasoli.

Su pi greco la bibliografia (e la filmografia) sono ampie, a vari livelli. Se vi va, a me fa piacere ricevere le vostre segnalazioni di quali libri, o film, vi appassionano e vi convincono di più. Scrivetemi le vostre micro recensioni sulla pagina Facebook del *Bello della matematica*[2].

[2] www.facebook.com/ilbellodellamatematica