Daniele Gouthier

TAGLIARE UNA TORTA IN PARTI UGUALI

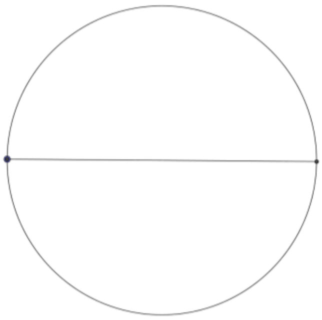
(dicembre 2015)

[1]

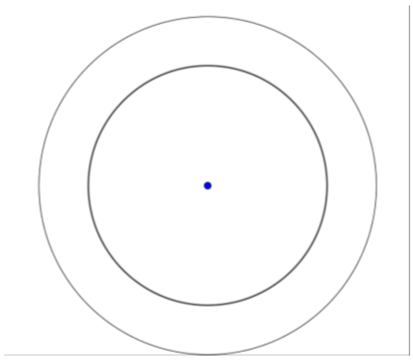
[1] Apparso in Invito alla natura, nella rubrica 5 minuti di matematica

Una torta, si sa, è uno strumento matematico. Basta volerla tagliare ed è subito… frazione.

Certamente ci sono situazioni nelle quali vogliamo tagliarla in due fette uguali. E allora possiamo farlo così:



Oppure così:



Uguali? In che senso uguali?

Current Address : via Puccini, 26 – 34078 Sagrado GO (Italy) Phone +39 3338189121 Skype: gouthier.daniele

La prima torta è divisa in due parti che hanno la stessa area – equivalenti – e lo stesso perimetro – equiperimetriche.

La seconda è divisa in due fette con la stessa area ma con perimetri diversi; per i più pigri posso dire che il raggio interno è dato da R:√2.

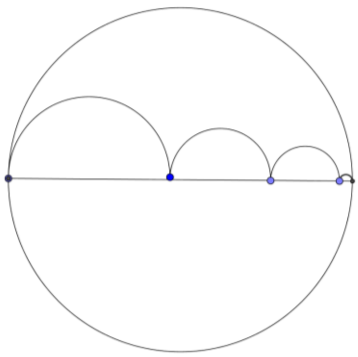
(Fino a qui e nel seguito parliamo di "area della torta" riferendoci alla superficie superiore, alla base se la vediamo come un solido. Non è proprio preciso ma per gli scopi che ci prefiguriamo va bene così).

Adesso cerchiamo solo suddivisioni di una torta in fette che hanno la stessa area e lo stesso perimetro. In più aggiungiamo la richiesta che vogliamo un perimetro lungo quanto… la circonferenza della torta.

Domanda: è possibile dividere una torta in due fette ciascuna delle quali con la stessa area e con il perimetro lungo quanto la circonferenza?

Concentriamoci sul perimetro e facciamo un'osservazione.

Dividiamo un diametro in alcune parti e su ciascuna costruiamo una semicirconferenza. Quanto vale la somma di tutte queste semicirconferenze?



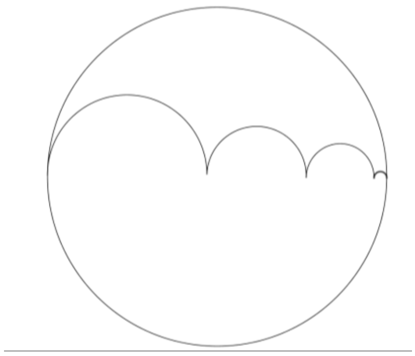
Ciascuna di loro è proporzionale al proprio diametro.

Current Address : via Puccini, 26 – 34078 Sagrado GO (Italy) Phone +39 3338189121 Skype: gouthier.daniele

Quindi la loro somma è proporzionale alla somma dei loro diametri, ovvero al diametro della torta.

Dunque la somma delle semicirconferenze è proprio lunga quanto la semicirconferenza della torta.

Detto altrimenti: questa divisione della torta produce due fette che hanno lo stesso perimetro, e il perimetro è uguale alla circonferenza di tutta la torta.

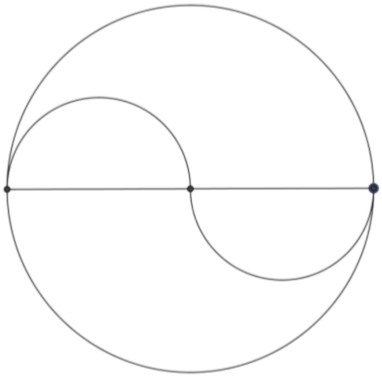


Ci stiamo incamminando sulla strada della soluzione.

Ora possiamo riformulare la domanda: se su un diametro costruiamo alcune semicirconferenze, riusciamo a dividere la torta in due parti con la stessa area?

Il segreto è mettere le semicirconferenze un po' da una parte e un po' dall'altra del diametro in modo che si compensino. Il caso più semplice è questo: dividiamo il diametro in due e su ciascun raggio costruiamo una semicirconferenza, ciascuna da una delle due parti del diametro.

Current Address : via Puccini, 26 – 34078 Sagrado GO (Italy) Phone +39 3338189121 Skype: gouthier.daniele



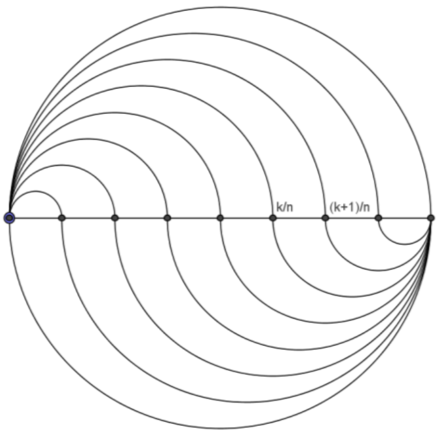
Le due fette hanno la stessa area e perimetro uguale alla circonferenza della torta.

Ultimo passaggio: e se intorno alla tavola non siamo in 2 ma in n? È possibile tagliare una torta in n fette tutte con la stessa area e tutte con perimetro uguale alla circonferenza della torta?

La risposta è ancora sì!

Ecco come.

Dividiamo il diametro in n parti uguali e disegniamo, sopra e sotto il diametro, tutte le semicirconferenze che hanno un estremo in comune con la circonferenza. Otteniamo questa figura.



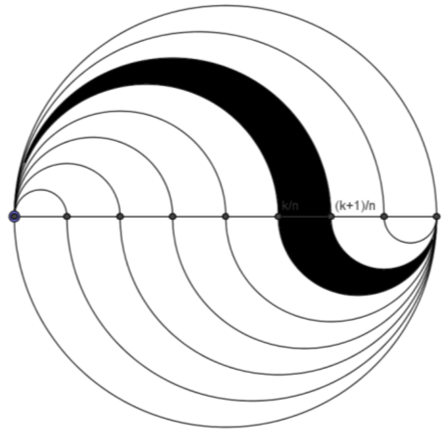
Current Address : via Puccini, 26 – 34078 Sagrado GO (Italy) Phone +39 3338189121 Skype: gouthier.daniele

Ebbene, tutte queste fette hanno la stessa area e perimetro uguale alla circonferenza.

Calcolare il perimetro non è difficile: due semicirconferenze, una superiore e una inferiore, che hanno un estremo comune, hanno come somma dei diametri il diametro della torta. Quindi assieme misurano quanto una semicirconferenza. E siamo a posto.

E le aree? Sono anche loro tutte uguali.

Proviamo a calcolare l'area colorata in nero.



Sopra abbiamo la differenza tra il semicerchio di raggio (k+1)/n e quello di raggio k/n.

Sotto abbiamo la differenza tra il semicerchio di raggio (1-k/n) e quello di raggio (1-(k+1)/n).

Allora l'area nera vale $\frac{\pi}{2}\left[\left(\frac{k+1}{n}\right)^2 - \left(\frac{k}{n}\right)^2 + \left(1 - \frac{k}{n}\right)^2 - \left(1 - \frac{k+1}{n}\right)^2\right] R^2$.

Lasciamo i calcoli per… esercizio e diamo solo il risultato: l'area vale $\frac{\pi}{n} R^2$.

Current Address : via Puccini, 26 – 34078 Sagrado GO (Italy) Phone +39 3338189121 Skype: gouthier.daniele

Il ragionamento che abbiamo fatto vale per tutte le fette che quindi hanno la stessa area e perimetro uguale alla circonferenza della torta.