Daniele Gouthier

IL LINGUAGGIO DELLA MATEMATICA

(2004)

[1]

[1] Apparso su Pedagogika.it

Chiunque si avvicini alla matematica, presto o tardi, nota l'uso particolare che questa fa del linguaggio, con il ricorso a termini definiti in modo rigoroso e utilizzati con univocità, assumendo che abbiano un unico significato possibile - beninteso all'interno dello specifico contesto matematico: il linguaggio è uno strumento della matematica che diventa efficace in quanto ciascun termine specialistico viene esplicitamente definito. In misura maggiore di altre discipline scientifiche, la matematica limita al massimo il ricorso a parole che non siano definite nel contesto d'uso.

Premessa

Anche in un enunciato elementare come quello del Teorema di Pitagora "in un triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente ai due quadrati costruiti sui cateti", le parole non matematiche si limitano ad articoli e preposizioni, tutto il resto ha una definizione univoca. Perché la comunicazione sia più agevole, serve che tutti i membri della comunità condividano il significato e l'uso degli altri termini: triangolo, rettangolo, quadrato, costruire, ipotenusa, equivalente, cateto. Per ciascuno di questi c'è una definizione rigorosa.

Apparentemente, si tratta di una differenza essenziale tra il linguaggio usato dalla matematica ed il linguaggio comune. In quest'ultimo, il significato delle parole contiene in sé un'intrinseca incertezza che spesso sappiamo superare solo grazie al senso di una frase nel suo complesso, al confronto che anima un dialogo, all'approfondimento che ricaviamo da una discussione. Senza arrivare a frasi con più di un significato (quali, ad esempio, "una vecchia porta la sbarra" oppure "una vecchia coperta di pelo"), siamo abituati a gestire parole che assumono accezioni diverse, che sono portatrici di ambiguità: anzi, "la possibilità stessa della comunicazione riposa su tale ambiguità che ne rappresenta in un certo senso la stabilità strutturale?[2]

Viceversa, una definizione sembra eliminare ogni margine d'incertezza, permettendo di utilizzare un termine secondo il modo corretto. Naturalmente, proporre una definizione matematica significa, prima di tutto, delimitare l'ambito nel quale quel termine assume quel significato, al di fuori di un ben determinato contesto, la definizione non vale più.

La situazione è ben descritta dalle parole di Heisenberg: "l'intrinseca incertezza del significato delle parole è stata naturalmente riconosciuta assai presto e ha portato alla necessità delle definizioni, o - come indica la parola <> - a stabilire dei limiti che determinino dove la parola può essere usata e dove no. Ma le definizioni possono venir date solo con l'aiuto di altri concetti e così in definitiva è necessario appoggiarsi ad alcuni concetti che sono presi come sono, non analizzati e non definiti".[3]

Per il fisico tedesco, cioè, è imprescindibile la natura ambigua delle parole. Il ruolo che Heisenberg propone di dare alla definizione serve a prendere atto di questa ambiguità e quindi adottare strategie per limitarne i possibili pericoli.

[2] T. Tonietti, Catastrofi, Bari, Dedalo, 1986, p.209.
[3] Heisenberg W., Fisica e filosofia, il Saggiatore, Milano, 1961.

Prima di tutto, Heisenberg dichiara che dando una definizione si pongono dei confini al contesto della sua validità. Poiché una definizione non vale in un unico contesto, ecco che quando questa viene data, contemporaneamente si dice dentro quale area il termine definito ha un unico significato e non è ambiguo.

Secondariamente una definizione presuppone l'introduzione di nuovi termini, che devono essere calibrati su chi dovrà utilizzarli e su che cosa questi termini vogliono dire. E questi termini richiamano concetti che sono, a loro volta, necessari per la definizione (o per la definizione di qualcuno dei termini che compaiono nella definizione, in una regressione iterata) e che, a un certo punto, dovranno essere assunti così come sono, non analizzati e non definiti. In questo scavo, attraverso concetti che definiscono altri concetti che a loro volta definiscono altri concetti, si arriva a individuare una caratteristica fondamentale del linguaggio presente anche nel caso (apparentemente il più rigoroso possibile) della matematica: esso poggia anche su strutture che non rientrano strettamente in una logica di premessa e deduzione, ma fanno appello ad associazioni tra diverse possibilità di significato dello stesso vocabolo. Si pensi, ad esempio, alla gamma di situazioni nelle quali si usa il verbo moltiplicare. Per i numeri naturali, significa prendere molte volte, ma negli altri contesti il significato si allontana via via per adattarsi a usi più generali. Insomma, ci si trova alle prese con un intrinseco grado di ambiguità, fondato su una rete di significati secondari, ma essenziali. In altre parole, risalendo nel processo di definizione dei termini, a un certo punto ci si deve arrestare davanti all'ambiguità, che rappresenta uno dei nuclei fondamentali intorno ai quali si aggrega la comunicazione, per riprendere l'idea di Tonietti.

Guardare la realtà

Un bambino considera vecchia una persona di trent'anni, per un adulto lo è un novantenne, eppure bambino e adulto s'intendono sulla parola "vecchio" senza ambiguità. Se vogliono misurare la vecchiaia astraggono e ricorrono all'età e sanno usare quest'astrazione in modo flessibile: un'automobile è vecchia dopo vent'anni, una farfalla dopo un giorno, un palazzo dopo secoli. Lo stesso accade per concetti che riguardano la vicinanza e la lontananza, la salute e la malattia, la ricchezza e la povertà, il caldo e il freddo. In tutti questi casi, una somma di convinzioni individuali, anche diverse, magari persino contrastanti, produce un'idea unificante che raccoglie tutti i punti di vista e porta a concetti più ampi.

Quello che si mette in atto è un confronto, spesso implicito e non dichiarato, tra bambino e adulto che contrattano sul significato della parola "vecchio" muovendo dalla propria esperienza: è un reciproco farsi le pulci, nel quale non è sempre l'adulto quello che afferma con maggior forza il proprio punto di vista. L'importante, ed è quello che accade, è che, alla fine del confronto, i due concordino sull'idea di vecchiaia, senza per questo dover rinunciare al proprio modo di applicarla. Si tratta di una prassi che accetta il confronto, la discussione, persino la polemica, senza eliminare le diversità.

Ciascuno di noi, per vivere nel mondo, ha bisogno di astrarre dalla realtà per ricavarne idee sulle quali fondare sia la conoscenza sia l'esperienza quotidiana. Siamo disposti a pagare il costo di una dissonanza tra quanto proviamo e sperimentiamo e quanto astraiamo, pur di avere modelli generali e condividere la nostra esperienza con altri. Non c'importa che per un abitante di un villaggio l'aggettivo lontano significhi "nel capoluogo della regione", mentre per un cosmopolita significhi "in un angolo sconosciuto dell'altro emisfero", è sufficiente poter condividere l'idea di lontananza, e ciascuno l'adatta alla propria esperienza.

Il pensiero razionale è possibile in quanto si fonda sulla condivisione tra gli uomini. C'è un accordo implicito su cosa sia un gatto, che non richiede un confronto tra tutti quelli che ne vedono uno, né una contrattazione animale per animale. Un gatto è un gatto.

Per tutti noi, con la sola eccezione dei logici e di pochi altri specialisti, un accordo di questo tipo funziona anche a proposito di entità teoriche quali gli insiemi: non serve contrattare caso per caso se quello che abbiamo davanti è un insieme o meno; non serve distinguere tra definizione per elencazione o definizione tramite una proprietà. Un insieme è un insieme. Non si tratta solo di appellarsi all'intuizione, ma piuttosto di riconoscere che, a monte di una qualche possibile formalizzazione dell'idea d'insieme, c'è una condivisione implicita di quell'oggetto matematico, proprio come accade a proposito della vecchiaia.

Quando pensiamo mettiamo in atto due astrazioni distinte che rendono conto di due molteplicità diverse: quella degli osservatori e quella degli osservati. Dobbiamo comunicare tra individui per condividere i nostri punti di vista, le rappresentazioni che costruiamo della realtà, ma anche per confrontare le soggettività, le sensazioni e i sentimenti: un bilancio di queste e altre sfaccettature porta alla comprensione delle molteplici diversità degli osservatori e delle loro osservazioni. Il confronto sulle parole favorisce lo scambio di idee e la formazione di convinzioni.

In parallelo, c'è il processo d'astrazione che da un oggetto deduce le caratteristiche di tutta una categoria. Dopo aver visto una sedia, o forse alcune sedie, siamo in grado di riconoscere ogni altra sedia. Inoltre, sappiamo riconoscere la funzione di sedia anche a oggetti che sedie non sono.

Pensiamo a quegli sgabelli ergonomici che permettono di stare in posizione corretta, appoggiando il peso sulle ginocchia e non sulla schiena. Qualche tempo fa non esistevano, hanno una forma alquanto diversa da una sedia tipica, eppure ognuno di noi è in grado di attribuire loro la stessa funzione: l'astrazione è andata oltre all'idea standard e si è estesa a una sopra categoria.

Lo stesso accade con la scoperta dei numeri che ognuno di noi fa nei primi anni di vita. Alla nascita siamo in grado di distinguere naturalmente solo i numeri più piccoli: tre, quattro, cinque sono evidenti a colpo d'occhio, per riconoscerne di più dobbiamo imparare a contare. La prima tappa di questo percorso è però meno raffinata: in molte situazioni, infatti, ci è sufficiente saper distinguere tra loro quantità che siano sufficientemente diverse, saper dire se un mucchio sia formato da molti o pochi oggetti.

Il concetto di molti non è affatto scontato, neanche in contrapposizione a pochi: classificare una pluralità di oggetti come molti o pochi dipende dall'esperienza personale, dalla percezione che abbiamo del mondo, dai bisogni che ci affliggono. Entrano in gioco aspetti soggettivi, culturali, legati alla visione della realtà e alla necessità del momento, e inevitabilmente interviene anche la natura degli oggetti che vogliamo quantificare.

Consideriamo per esempio una persona che abbia vissuto molto a lungo (diciamo un ultra centenario) e contiamo tanti chicchi di riso quanti sono gli anni di quell'anziano: il mucchietto di riso sarà in ogni caso piccolo. D'altra parte, avendo davanti a noi alcuni mucchi di riso sappiamo dire benissimo se in ciascuno i chicchi sono molti o pochi, anche senza avere un'idea rigorosa e formalizzata di cosa significhi parlare di molti chicchi di riso (cento? mille? un milione?) o di pochi chicchi di riso (due? dieci? cento?). L'utilità pratica immediata della distinzione tra molti e pochi è data dalla possibilità di effettuare, o meno, confronti, e dall'esempio è evidente che si tratta di una distinzione così buona che sappiamo applicarla con modalità diverse per oggetti diversi: i chicchi di riso o gli anni di una vita umana.

Quando non è più sufficiente la differenza tra molti e pochi, ricorriamo a distinzioni più raffinate, impariamo a contare ed ecco che sappiamo esattamente quanti sono due mila novecento ottanta tre chicchi di riso. Siamo partiti dalla necessità di confrontare quantità diverse e abbiamo prodotto un risultato molto più potente che permette distinzioni puntuali e tanto precise quanto vogliamo. E non basta: dopo i numeri per contare (numeri naturali), impariamo quelli che permettono di relazionare due quantità in base alle rispettive grandezze (numeri relativi), quelli che ne descrivono i reciproci rapporti (numeri razionali). Più tardi, infine, facciamo nostro il concetto di continuità e accettiamo l'esistenza e le proprietà dei numeri reali. Insomma, l'umanità ha superato l'idea di molti e pochi e ha partorito un'astrazione molto più generale, i numeri, e presto ha imparato a farne un uso flessibile, riconoscendo lo status di numero a nuovi concetti che con gli originari numeri naturali condividono solo alcuni aspetti essenziali.

La spinta sociale

All'origine del linguaggio umano vi è l'evoluzione di una pratica sociale delle scimmie:[4] tutte, compresa la scimmia nuda che chiamò se stessa Homo sapiens, vivono in reti sociali

[4] Dunbar R., Dalla nascita del linguaggio alla Babele delle lingue, Longanesi, Milano, 1998.

ristrette, limitate a qualche decina d'individui, qualche centinaia al più. La coesione di ciascuna rete dipende, per cento novantadue specie di scimmia, dalla rassicurante pratica del 'grooming', la pulizia reciproca: più è estesa la rete, più tempo gli individui dedicano a pulirsi l'un l'altro. Il grooming fa da collante per la comunità, produce fiducia e condivisione, mette le scimmie in comunicazione l'un con l'altra e le spinge a relazionarsi in una rete sociale che innerva quel gruppo di individui.

Homo sapiens è l'unica delle scimmie a fare eccezione: nelle sue reti sociali è riuscito ad andare molto oltre il tetto delle poche centinaia di individui. Per mantenere coeso il suo gruppo, ha inventato il linguaggio, sorto per colmare una lacuna aperta dall'evoluzione, quella che ha squarciato la trama delle relazioni sociali basate sulla pulizia reciproca, sul grooming. Da allora in poi, il linguaggio ha reso possibile le interazioni che caratterizzano oggi le molteplici relazioni fra gli esseri umani. Ha permesso, cioè, d'immaginare e mettere in atto dinamiche che sfuggono alle possibilità di gruppi ristretti, che sono poi i gruppi nei quali effettivamente viviamo. E ha permesso di poter comunicare - non solo potenzialmente - anche con individui lontanissimi nello spazio e nel tempo, in un'interazione che porta in sé un alto livello di astrazione.

In un gioco ideale di richiami, all’origine della matematica e più in particolare della geometria, vi è l'evoluzione di una pratica sociale degli antichi Egizi. Molti popoli dell'antichità, compreso quello che abitava lungo il corso del Nilo, per l'appunto gli Egizi, vivevano del loro fiume e dell'irrigazione che ne derivava alle terre circostanti. La coesione di ciascuna comunità fluviale dipendeva dalla definizione della proprietà privata: più era vasta la comunità, più era importante saper attribuire la proprietà della terra, dotandosi di figure quali scribi e geometri e di strumenti quali la tassazione delle terre[5] e la registrazione dei confini. La proprietà faceva da collante per la comunità, riduceva i conflitti e le occasioni di scontro.

Il Nilo, però, aveva la caratteristica di inondare annualmente le terre circostanti: portava fertilità sempre rinnovata ed evitava di dover ruotare le coltivazioni, ma ogni anno spazzava via i confini che definivano le proprietà. Il Nilo che rendeva appetibile possedere terreni, era lo stesso che non permetteva di tenere traccia materiale dei loro confini. Per gli Egizi, la rassicurante pratica del segnare i confini era un'ardua impresa.

Così furono costretti a inventarsi un'alternativa e riuscirono ad andare molto oltre la necessità di un confine materiale. Per mantenere coeso il loro gruppo sociale, inventarono la geometria: la pratica, ma prestissimo soprattutto la teoria, che permette di misurare la terra sulla base di pochissimi punti di riferimento sul terreno, sorta per colmare una lacuna aperta dal Nilo, quella che ha squarciato la trama delle relazioni sociali basate sulla certezza materiale della proprietà. Da allora in poi, la geometria, e più in generale la matematica, hanno reso più agevoli le interazioni sociali che caratterizzano oggi molte delle relazioni fra gli esseri umani. Hanno permesso, cioè, d'immaginare e mettere in atto relazioni teoriche che sfuggono alle possibilità delle semplici azioni concrete, che sono poi le azioni che effettivamente compiamo. E hanno permesso di poter comunicare - non solo potenzialmente - anche con individui lontanissimi, nello spazio e nel tempo, in un'interazione che porta in sé un alto livello di astrazione.

[5] L'imposizione di tasse sulle terre aveva, infatti, la duplice funzione di fornire risorse per il sovrano e di confermare la legittimità delle proprietà per chi le deteneva.

Per il linguaggio come per la matematica, alla necessità di superare i limiti e le ambiguità della realtà, è stata data una risposta per mezzo dell'astrazione, che diventa pertanto il fondamento tanto dell'uno quanto dell'altra.

Grooming matematico

Nel caso della matematica, il vocabolario si compone di formule, immagini e testo, e il testo è formato da frasi logicamente strutturate, all'interno delle quali trovano posto, oltre a termini specifici, anche caratteri tecnici, formule e simboli propriamente matematici sempre più lontani dal senso comune.

Inoltre, nella comunicazione pubblica, il testo è ricco di altre immagini: quelle figurate che, superando i limiti angusti del rigore e dell'oggettività, mirano a rappresentare (qui usato nell'accezione originaria di "presentare una seconda volta") altrimenti idee e teorie, in modo che anche il lettore non specialista possa figurarsi quelle idee e quelle teorie. Di fatti, se il rigore e l'oggettività sono vitali per il matematico e gli permettono di far procedere il suo pensiero, per chi matematico non è, è importante trovare altre parole e formulare altri modi che esprimano le idee e le teorie.

Quest'alterità del linguaggio è dettata dall'esigenza di proporre figure di pensiero che rielaborino concetti pensati in altri contesti per altre orecchie, nonché dall'esigenza di gettare nuova luce su nessi che mettono in relazione idee diverse. La prima elaborazione, che potremmo dire originaria, ha bisogno di rigore e oggettività per far emergere nuova conoscenza. La seconda, cioè proprio la rielaborazione, invece, ha bisogno di parole e modi che raffigurino questa conoscenza anche per chi non ha la necessità di rifare il percorso che l'ha generata, per chi ha solo l'esigenza d'impararla e di comprenderla.

Nel far questo, la consistenza semantica degli stessi termini specialistici risulta modificata, deformata; questi s’impoveriscono tecnicamente per fare posto a un aumento del loro potere evocativo, della loro suggestione, ossia della loro ambiguità.

La ragione di questa deformazione - che spesso stride all'orecchio del matematico - risiede tutta nella fondamentale differenza degli attori che caratterizzano da una parte la ricerca e dall'altra la sua comunicazione pubblica. La prima ha, infatti, bisogno di fornire strumenti linguistici immediatamente riutilizzabili da tutti i membri di una comunità ristretta, affinché si possa passare il più rapidamente possibile all’elaborazione di nuova conoscenza. Nella seconda, invece, non vi è l'esigenza di rendere qualcuno abile nella produzione di progressive piattaforme di sapere mutuate da ciò che questi sta apprendendo. Addirittura, è frequente che la comunicazione pubblica non coinvolga nessun attore esperto ma che preveda scambi di conoscenze, opinioni e credenze, tra persone o gruppi che non si pongono il problema di imparare o di far imparare, ma piuttosto quello di decidere e, meglio ancora, di capire su quali basi decidere. Ecco allora che il ricorso a un linguaggio figurato, vale a dire ambiguo, è spesso una scelta inevitabile per comunicare efficacemente.

Quello che conta è che coloro che parlano di matematica siano (o meglio si sentano) liberi di abbandonarsi a pratiche rassicuranti, le quali facciano da collante di quella particolare comunità, producendo fiducia e condivisione, mettendo gli individui in comunicazione l'uno con l'altro e spingendoli a mettersi in rete. Conta cioè che ciascuno sia libero di usare il proprio linguaggio e che, dal confronto con gli altri, esca rafforzato da tutti quegli interventi, quelle puntualizzazioni che "fanno le pulci" a quanto dice: perché è da questo processo che si apprende il linguaggio migliore per fare matematica.

Serve che un gruppo che parla di matematica adotti quello che ci piace chiamare grooming matematico.[6]

Parliamo di una prassi che accetta il confronto, la discussione, persino la polemica, su concetti e problemi matematici, perché è in un quadro di condivisione collettiva, sociale, che si creano le condizioni di stabilità del linguaggio nella matematica e, di conseguenza, della matematica stessa. E da questo grooming nasce la possibilità che il linguaggio e la matematica vengano sentiti come una necessità propria, da conseguire cercando l'astrazione.

[6] Un bell'esempio di grooming matematico è dato dalle dieci lezioni che Serge Lang ha raccolto in La bellezza della matematica, Bollati Boringhieri, Torino, 1991.