Daniele Gouthier

Quante sono le stelle?

#ilbellodellamatematica

LIBRERIA BONOMO editrice

Daniele Gouthier

Quante sono le stelle?

#ilbellodellamatematica

LIBRERIA BONOMO editrice

Daniele Gouthier è un matematico e uno scrittore di scienza. Insegna *Comunicazione della matematica e della fisica* al Master in Comunicazione della Scienza alla Sissa di Trieste, *Matematica per il design 1 e 2* al *Diploma accademico in Disegno Industriale* al

È autore del libro di testo per le scuole secondarie di primo grado *Il bello della matematica* (Pearson Bruno Mondadori, 2014).

Libreria Bonomo di A. Zama & C. sas
Via Zamboni 26/a – Bologna – tel. 051.22.15.10
www.libreriabonomo.com

Stampato presso Libreria Bonomo – Bologna
Ottobre 2014

La foto in copertina è di Geralt, Pixabay (CC0 Public Domain)

Che bella idea!

Attività per *fare* matematica

Quante sono le stelle? è la prima *Bella idea*. Si tratta della presentazione di un fatto geometrico elementare che offre spunti per attività ed esercizi interessanti e formativi.

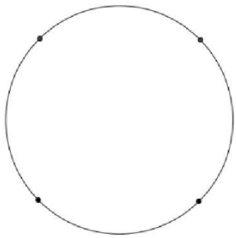
1) Può servirti da riflessione personale – tanto se insegni alla scuola primaria quanto a quella secondaria di primo grado.
2) In alternativa, può fornirti gli strumenti per alcune attività da fare in classe, prese singolarmente o tutte assieme seguendo il percorso che trovi in queste pagine.
3) L'ultimo capitoletto ti offre la possibilità di usare *Quante sono le stelle?* come un argomento da far sviluppare in classe ai tuoi studenti, per provare a *fare* matematica a partire da un problema del quale, a priori, non è immediata la soluzione.

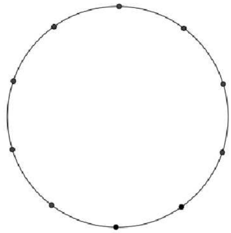
Buona lettura!

Tempo stimato in aula: 30’

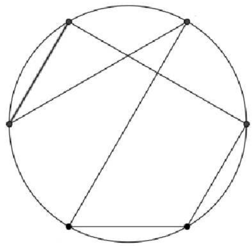
Dai punti agli ammassi

Disegnamo su una circonferenza alcuni punti che la dividono in archi congruenti: i punti saranno i vertici di un poligono regolare.





Per semplicità scegliamo i vertici di un poligono regolare anche se, conclusa la lettura, sarà evidente che potremmo prendere N punti senza preoccuparci della distanza reciproca. In questo momento, però, scegliere i vertici di un poligono regolare ci permette di concentrarci su ciò che è importante.



Uniamo i punti con altrettanti segmenti (a piacere!) in modo da disegnare una spezzata chiusa: ciascun punto deve essere estremo di solo due segmenti. Non è consentito entrare né uscire da un vertice più di una volta.

Definizione. Chiamiamo **ammassi** le spezzate che passano una sola volta per ciascuno dei vertici di un poligono regolare. I vertici sono le **punte** degli ammassi.

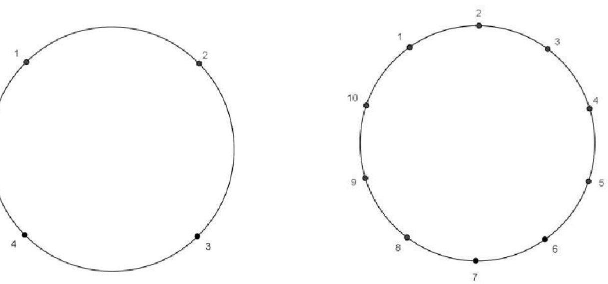
Attività. Disegna un ammasso e una spezzata chiusa che tocchi tutti i vertici ma che non sia un ammasso.

Se prendiamo numeri diversi di punte, disegniamo ammassi diversi. D'altra parte anche con lo stesso numero di punte, abbiamo più ammassi possibili.

Problema. In quanti modi possiamo disegnare un ammasso? Quanti sono gli ammassi?

Attività. Disegna gli ammassi a 3 punte. Quanti sono? Quanti sono gli ammassi a 4 punte? E quelli a 5?

Per poter fare i primi passi, un buon suggerimento è numerare le punte in senso orario da 1 a… N.



I numeri ci aiutano a descrivere gli ammassi. Ogni lista formata da tutti i numeri da 1 a N nell'ordine che preferisci rappresenta un ammasso. Per ricordarci che un ammasso è una spezzata chiusa, in fondo alla lista ripetiamo il primo numero della lista.

Tempo stimato in aula: 90’

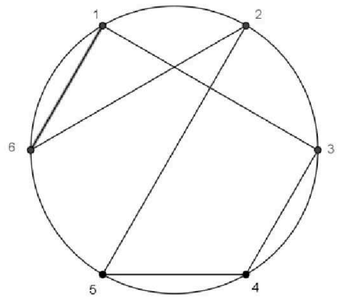
Le mappe degli ammassi

Le liste che ci interessano hanno due proprietà.

- ✓ Il primo e l’ultimo termine della lista sono uguali.
- ✓ Se non consideriamo l’ultimo termine, tutti gli altri sono i primi N numeri mischiati a piacere.

Definizione. Una lista dei primi N numeri naturali (con l’aggiunta all’ultimo posto del primo termine della lista) si chiama **mappa** di un ammasso.

Esempio. Sul cerchio con 6 punte, la mappa 1→3→4→5→2→6→1 descrive l’ammasso qui a lato.



Ogni mappa descrive un ammasso e ogni ammasso è descritto da una mappa.

Naturalmente, un ammasso può essere descritto da **più** mappe.

4→5→2→6→1 →3→4→ e 6→2→5→4→3→1→6 sono altre due mappe che descrivono l’ammasso di questo esempio.

Attività. Disegna gli ammassi descritti da queste mappe:

1→3→4→5→2→1

4→3→1→2→5→4

2→3→4→5→1→2

5→2→1→3→4→5

Tre delle mappe descrivono lo stesso ammasso. Quali?

Una è la mappa di un ammasso diverso. Riconoscila.

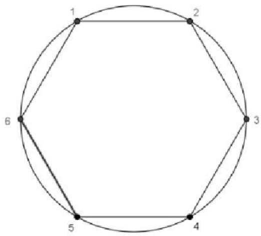
Gioco. Dividi la classe a coppie. Il primo studente della coppia disegna un ammasso. Il secondo scrive una mappa che lo descrive. Se la mappa è corretta, prende un punto e tocca a lui disegnare un altro ammasso. Se sbaglia, il punto va all'avversario che disegna un altro ammasso.

Variante del gioco. Il primo giocatore della coppia scrive una mappa. Il secondo giocatore deve disegnare l'ammasso descritto da quella mappa.

Gioco. Metti la classe in cerchio. Uno dei giocatori lancia una palla a un altro che la rilancia a un terzo. E così via. Bisogna completare l'ammasso senza che nessuno mandi la palla a un giocatore che l'ha già ricevuta. E si sta tutti… in silenzio!

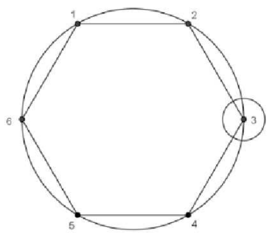
La mappa più semplice di tutte è quella che ordina i primi N numeri dal minore al maggiore: 1→2→3→4→…→N→1 (senza dimenticarci di ripetere all'ultimo posto il primo numero).

Questa mappa corrisponde all'ammasso banale: il **poligono regolare** percorso in senso orario.

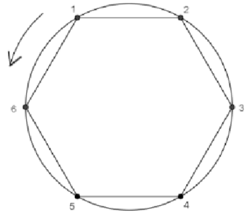


1→2→3→4→…→N→1, naturalmente, non è l'unica mappa di un poligono regolare. Ne proponiamo altre due.

Possiamo cominciare a percorrere il poligono da un'altra punta, ad esempio da 3, e abbiamo:
3→4→5→6→…→N→1→2→3.



Oppure possiamo percorrere il poligono in senso antiorario, sempre a partire da 1, e abbiamo la lista:
1→N→…→4→3→2→1.



Attività. Disegna un ammasso alla lavagna e descrivilo con mappe che iniziano da numeri diversi o che la percorrono nel senso opposto: con i tuoi studenti, potete proporre mappe diverse proprio come per i poligoni regolari. Dunque provate a riconoscere quando due liste descrivono lo stesso ammasso. Infine potete anche giocare a scrivere due mappe alla lavagna e i ragazzi devono indovinare se descrivono lo stesso ammasso o no.

Con Geogebra. Con la LIM, o con i computer nell'aula informatica, apri Geogebra e traccia un poligono regolare. Disegna i vertici e poi nascondi il poligono in modo che rimangano solo i vertici.

Ora puoi operare disegnando qualche ammasso secondo il procedimento che abbiamo visto.

Tempo stimato in aula: 60’

Sommare e sottrarre… salti

Per qualcuno può essere più semplice ragionare in modo aritmetico invece che in modo geometrico. Allora consideriamo addizioni e sottrazioni di… punte. O meglio di **salti** da una punta all’altra.

Capire cosa sono è più facile a farsi che a dirsi.

Quando siamo su una punta,

- ✓ aggiungere 1 significa **saltare** da una punta alla punta successiva **in senso orario**;
- ✓ sottrarre 1 significa **saltare** da una punta alla successiva **in senso antiorario**.

Con queste operazioni, il poligono regolare è descritto da N somme tutte uguali: in ciascuna sommiamo 1 (oppure da N sottrazioni tutte uguali: sottraiamo per N volte 1).

Usando le addizioni di punte, la mappa 1→3→4→5→2→6→1 (dell’esempio del capitolo precedente) può essere riscritta come una lista di somme di salti:

+2 +1 +1 +3 +4 +1

Approfondimento. L’addizione e la sottrazione di punte sono le operazioni dell’aritmetica modulare, anche conosciuta come aritmetica dell’orologio: 6 ore dopo le 9 sono le 15, ovvero le 3:

6+9=3.

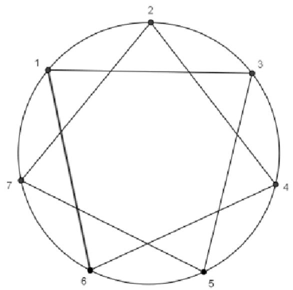
Tempo stimato in aula: 90’

Ammassi con ritmo: le stelle

Tra tutti gli ammassi, salta all’occhio che ce ne sono di più belli degli altri: alcuni ammassi hanno armonia, hanno… ritmo.

Pensiamo agli ammassi che si ottengono facendo sempre lo stesso salto (la stessa addizione oppure, non cambia nulla, la stessa sottrazione).

Sul cerchio con 7 punte consideriamo il salto +2: otteniamo la mappa 1→3→5→7→2→4→6→1 che descrive questo ammasso:



Definizione. Un ammasso descritto sempre dallo stesso salto è una **stella**.

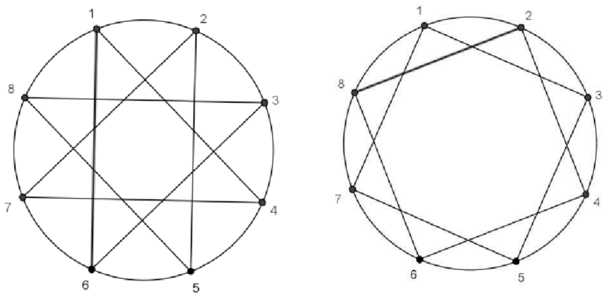
Quante sono le stelle? Dipende… dal numero delle punte.

Quante sono le stelle con lo stesso numero di punte? Dipende… dal numero delle punte!

In ogni caso, ci sono stelle e stelle.

Alcune, le stelle più belle, possono essere disegnate senza mai alzare la matita dal foglio: diciamo che hanno una sola **componente**.

Altre non possono essere disegnate senza alzare la matita dal foglio, perché a un certo punto torniamo sui nostri passi e dobbiamo ricominciare da un'altra punta: ogni volta che ricominciamo, disegniamo una nuova componente della stella.



La prima stella ha una componente sola ed è descritta dalla mappa 1→4→7→2→5→8→3→6→1

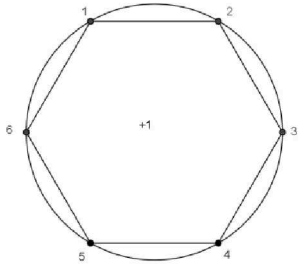
La seconda ha due componenti e non basta una mappa per descriverla: ne servono due 1→3→5→7→1 e 2→4→6→8→2.

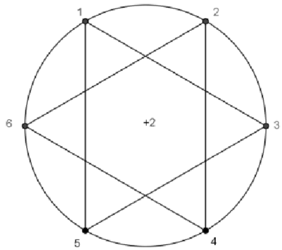
Attività. Disegna tutte le stelle con 4 punte. Poi tutte quelle con 5. Tutte quelle con 6. Tutte quelle con 7…

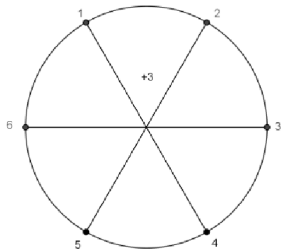
In alcuni casi (4 e 6 punte) hai trovato stelle con una, due o tre componenti. In altri casi (5 e 7) hai trovato solo stelle con una componente. Perché?

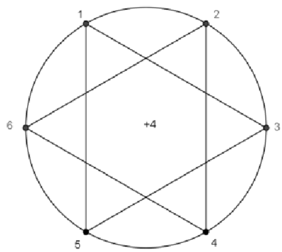
Problema. Per quali numeri di punte, tutte le stelle con quel numero di punte hanno una sola componente?

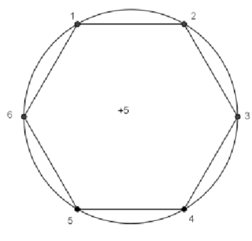
Esempio. Sul cerchio con 6 punte, possiamo disegnare 5 stelle, una per ciascun salto da +1 a +5.











Osserviamo che la prima e l’ultima stella sono l’esagono regolare percorso una volta in senso orario e l’altra in senso antiorario.

Anche la seconda e la terza stella sono uguali e differiscono solo per il senso orario o antiorario con cui sono disegnate.

Osservazione. Se la somma di due salti è il numero delle punte, allora i due salti descrivono la stessa stella, l'uno in senso orario, l'altro in senso antiorario.

Attività. Verifica con i tuoi ragazzi che l'osservazione è vera per ogni stella. Verifica ad esempio con 8 punte che i salti +3 e +5 descrivono la stessa stella.

Per disegnare tutte le stelle con N punte, quindi ci basta considerare le stelle con i salti piccoli (+1, +2, +3…), fino alla metà di N, se N è pari, o fino alla metà di N+1, se N è dispari.

Se andiamo oltre la metà, ritroviamo le stelle che abbiamo già disegnato.

Riassumiamo in una tabellina come sono fatte le stelle con 6 punte.

Punte	Salto	Punte di una componente	Componenti
6	1	6	1
6	2	3	2
6	3	2	3
6	4	3	2
6	5	6	1

Il numero di componenti moltiplicato per il numero di punte di una componente è proprio il numero delle punte della stella.

Tempo stimato in aula: 90’

I mattoni dei numeri: i divisori

Il numero di componenti di una stella dipende da altri due numeri: il numero complessivo delle punte e il salto.

Per capire come sono legati questi tre numeri, riprendiamo qualche concetto aritmetico.

Possiamo sempre moltiplicare tra loro due numeri naturali.

Invece, non è detto che possiamo dividere un numero naturale N per un numero naturale M: questo succede solo se M è un **divisore** di N.

Ogni numero naturale N ha dei divisori: infatti almeno 1 e N sono divisori di N.

Se N ha esattamente due divisori (1 e N), N è un numero **primo**.

Se N ha anche altri divisori, N è un numero **composto**.

Prendiamo due numeri naturali N e M e guardiamo le liste dei loro divisori. Segniamo su ogni lista i divisori comuni: comunque scegliamo N e M, almeno il numero 1 compare in tutte e due le liste.

Il più grande dei divisori comuni a N e a M è il loro **massimo comun divisore**, che indichiamo con MCD(N, M).

Se il massimo comun divisore è 1, N e M sono **primi tra loro**.

Esempio. Ecco i divisori dei primi numeri naturali.

Divisori di 1:	1					
Divisori di 2:	1	2				
Divisori di 3:	1		3			
Divisori di 4:	1	2		4		
Divisori di 5:	1				5	
Divisori di 6:	1	2	3			6

Osservando questo schema è facile determinare il massimo comun divisore delle coppie di numeri.

Prendiamo le coppie formate da 6 e da ciascuno dei numeri minori di 6. Otteniamo questi massimi comun divisori.

N	M	MCD(N, M)
6	1	1
6	2	2
6	3	3
6	4	2
6	5	1

Attività. Confronta questa tabella con la tabella di punte, salti e componenti nel capitolo precedente.

Che cosa osservi? Ci sono colonne uguali?

Proprietà. Una stella ha tante componenti quanto è il massimo comun divisore tra il numero di punte e il salto.

Tempo stimato in aula: 60’

Punte, salto e componenti

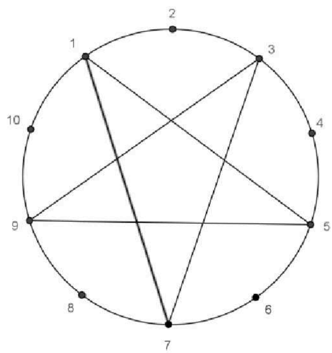
Perché una stella ha proprio tante componenti quanto è il massimo comun divisore tra il numero di punte e il salto?

Lo vediamo su un esempio particolare, ma quello che andiamo a dire vale per **ogni stella**, indipendentemente dal numero di punte e dal salto.

Disegniamo la stella con 10 punte e salto 4.

Il massimo comun divisore tra 10 e 4 è 2: MCD(10; 4)=2.

Ci aspettiamo che le componenti che disegniamo siano 2.



Iniziamo a disegnarne una, quella che parte dalla punta 1:

1→5→9→3→7→1

A forza di fare salti 4, in 5 salti abbiamo fatto 4×5=20 passi, ovvero 2 giri esatti della circonferenza con 10 punte.

Link. Qui puoi notare, e far notare, che 20 è il minimo comune multiplo tra 10 e 4 (e non è un caso!).

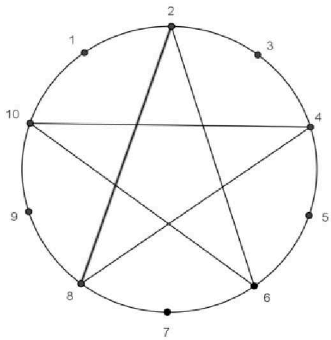
Il numero di punte di una componente di una stella è sempre il quoziente tra questo minimo comune multiplo e il salto.

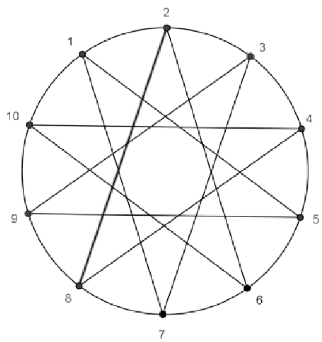
Con 20 passi abbiamo chiuso una prima componente che ha 5 punte. Osserviamo due fatti:

- ✓ disegnando la stella, prima o poi passiamo da ciascuna delle 10 punte e ci passiamo con salto 4; quindi in tutto percorriamo 4×10=40 passi. Se ne facciamo 20 per una componente, le componenti devono essere 40:20=2.
- ✓ 5 è il quoziente tra il numero 10 di punte e 2, il massimo comun divisore tra 10 e 4.

Ora disegniamo la seconda componente, quella che parte da una delle punte non ancora toccate, ad esempio dalla punta 2:

2→6→10→4→8→2





In effetti, tra la prima e la seconda abbiamo toccato tutte e 10 le punte.

Gioco. Procuratevi saponette tonde e piatte, spilli e fili di lana colorata. Ogni studente sistema gli spilli a raggera su una saponetta e costruisce una stella diversa da quella del compagno. Buon divertimento!

Tempo stimato in aula: 60’

Senza mai alzare la matita

Ritorniamo al nostro problema.

Problema. Per quali numeri di punte, tutte le stelle con quel numero di punte hanno una sola componente?

Ricordandoci dei numeri naturali, dei divisori comuni e del massimo comun divisore siamo in grado di rispondere.

Per farlo torniamo alle due stelle con 8 punte che abbiamo disegnato nel capitolo *Ammassi con ritmo: le stelle*.

La prima ha salto 3 e 1 sola componente: 1 è il massimo comun divisore tra 8 e 3.

La seconda ha salto 2 e 2 componenti: 2 è il massimo comun divisore tra 8 e 2.

Proprietà. Fissato il numero di punte, se il salto e il numero di punte sono primi tra loro, la stella ha una sola componente.
In particolare, quando il numero di punte è un numero primo, tutte le stelle hanno una sola componente.

Infatti, il salto è sempre minore del numero di punte e, nel caso di un numero primo di punte, questo e ciascun salto sono primi tra loro.

Questa è la ragione per cui le stelle con un numero primo di punte hanno una sola componente.

Hanno una sola componente tutte le stelle con 2, 3, 5, 7, 11, 13… punte.

Attività. Disegna tutte le stelle con 7 punte. Disegna tutte le stelle con 13 punte.

Per concludere l'attività sulle stelle, proponiamo tre attività, le prime due fanno fare un passo più in là, la terza offre un momento di movimento e divertimento.

Problema. Disegniamo una qualsiasi delle stelle che abbiamo ottenuto e coloriamo i lati rispettando due regole: a) due lati con una punta in comune non possono avere lo stesso colore; b) due lati che si incrociano non possono avere lo stesso colore. Quanti colori servono per colorare la stella? È sempre possibile colorare una stella?

Discussione. Tracciamo la circonferenza con cui abbiamo incominciato. Disegniamoci alcuni punti, non necessariamente alla stessa distanza l'uno dall'altro. Cambia qualcosa nel problema delle stelle? Il numero di componenti è diverso? Perché?

Gioco. Procuratevi alcuni gomitoli. Disponetevi in cerchio e lanciatevi uno dei gomitoli per formare una stella. Quando avete completato una componente, prendete un altro gomitolo. E così via. Buon divertimento!

Matematica × tutti

Volendo investire tra le sei e le otto ore, potete utilizzare *Quante sono le stelle?* per costruire un percorso autonomo sviluppato dai ragazzi. In questo caso, vi limiterete a enunciare il primo problema (e poi i successivi, eventualmente introducendone di vostri per spezzare il discorso) e lascerete che siano i ragazzi a *fare matematica*.

Questo potrà succedere in una discussione collettiva, nella quale vi manterrete ai margini fornendo, se il caso, qualche minima dritta e qualche piccolo suggerimento.

Oppure, meglio, potrà succedere dopo aver diviso la classe in piccoli gruppi. In questo caso, il mio consiglio è di alternare a fasi in gruppo altre in plenaria per coinvolgere tutta la classe in una dinamica cooperativa che favorisce la creatività.

In questo scenario, il risultato non è predeterminabile. Ciascuna classe (ciascun piccolo gruppo) potrà indirizzarsi lungo una via diversa. Ci sarà:

- ✓ Chi è più orientato al disegno
- ✓ Chi analizzerà le diverse combinazioni di punti
- ✓ Chi approfondirà gli aspetti aritmetici
- ✓ Chi si soffermerà su un numero di punti primo
- ✓ Chi invece studierà numeri di punti con molti divisori

In definitiva, ognuno asseconderà la propria creatività e le proprie idee.

Che bella idea! è una proposta di **#ilbellodellamatematica**, la pagina Facebook che gestisco per comunicare e dialogare con gli insegnanti di matematica (e non solo!) della scuola secondaria di primo grado.

Scrivete su **#ilbellodellamatematica** per raccontarci come avete usato con i vostri ragazzi *Quante sono le stelle?*.

Se non siete su Facebook, potete comunicare con me tramite www.danielegouthier.it.

(stampato in proprio, ottobre 2014)

Un libro di Daniele Gouthier
Matematica per tutti.
Anche per te. Con i tuoi studenti.