

I trapezi e lo strano caso del rettangolo (fantasma)

Daniele Gouthier, marzo 2017

Il *Libro I* degli *Elementi* di Euclide inizia con le definizioni, la prima delle quali è la celeberrima “Punto è ciò che non ha parti”. La ventiduesima e penultima merita di essere citata per intero.

XXII Delle figure quadrilatera, è quadrato quella che è insieme equilatera ed ha gli angoli retti, rettangolo quella che ha gli angoli retti ma non è equilatera, rombo quella che è equilatera, ma non ha gli angoli retti, romboide quella che ha i lati e gli angoli opposti uguali fra loro, ma non è equilatera né ha gli angoli retti. E le figure quadrilatera oltre a queste si chiamano trapezi.

I curatori, Attilio Frajese e Lamberto Maccioni, dell’edizione Utet del 1970, a questo proposito annotano: come si vede, il termine “trapezio” è usato da Euclide in senso diverso dal nostro. E va detto che i nostri “trapezi” non vengono, del resto mai considerati in modo autonomo negli *Elementi*.

La successiva e ultima delle definizioni, la XXIII, è a proposito del parallelismo e recita come segue. Parallele sono quelle rette che, essendo nello stesso piano e venendo prolungate illimitatamente dall’una e dall’altra parte, non si incontrano fra loro da nessuna delle due parti.

Osserviamo quindi che nell’impianto di Euclide si parla di quadrilateri prima che di parallelismo e che i trapezi non hanno una collocazione né uno sviluppo autonomi.

Forse è da qui che ha origine una certa confusione nelle definizioni “moderne” dei trapezi. Nel seguito provo a confrontare tre linee di definizione per i trapezi-trapezi rettangoli-trapezi isosceli e ne propongo quindi una quarta che a mio parere supera qualche criticità delle prime tre.

Gli autori del tipo (A) propongono queste definizioni.

- ✓ Si dice trapezio un quadrilatero che ha una coppia di lati paralleli. I due lati paralleli si chiamano basi. I due lati non paralleli si chiamano lati obliqui o semplicemente lati.
- ✓ Un trapezio si dice rettangolo se uno dei suoi lati obliqui è perpendicolare alle basi.
- ✓ Un trapezio si dice isoscele se i suoi lati obliqui sono congruenti e le basi non lo sono.

Gli autori del tipo (B) propongono queste definizioni.

- ✓ Un trapezio è un quadrilatero con due soli lati paralleli. I due lati paralleli si chiamano basi. I due lati non paralleli si chiamano lati obliqui o semplicemente lati.
- ✓ Un trapezio rettangolo è un trapezio che ha uno dei lati perpendicolare alle basi.
- ✓ Un trapezio isoscele è un trapezio che ha i dati obliqui congruenti.

Gli autori del tipo (C) propongono queste definizioni.

- ✓ Dato un piano, si definisce trapezio un qualunque quadrilatero convesso che ha almeno una coppia di lati paralleli (basi).
- ✓ Si definisce trapezio rettangolo un qualunque trapezio in cui almeno uno dei lati residui è perpendicolare alle basi.
- ✓ Si definisce trapezio isoscele un qualunque trapezio con una sola coppia di lati paralleli in cui i due lati residui (anche detti lati obliqui) sono congruenti.

In tutte e tre le linee di definizioni, (A), (B) e (C), si ottiene un teorema di caratterizzazione dei trapezi isosceli.

Teorema di caratterizzazione dei trapezi isosceli

Un trapezio è isoscele se e solo se gli angoli adiacenti a una delle basi sono congruenti e le diagonali sono congruenti.

La dimostrazione è lasciata come facile esercizio... ;)

Facciamo ora alcune osservazioni sulle tre linee.

Secondo la linea (A) e secondo la linea (C), i parallelogrammi sono trapezi ma non sono trapezi isosceli. Pertanto i rettangoli, in quanto parallelogrammi, sono trapezi ma non sono trapezi isosceli. (Sono invece trapezi rettangoli, ma questo qui ci interessa meno). I rettangoli, inoltre, passano al vaglio del teorema di caratterizzazione dei trapezi isosceli: infatti hanno gli angoli adiacenti alle basi congruenti e le diagonali congruenti. Caso strano: abbiamo trovato dei trapezi, i rettangoli, che si caratterizzano come trapezi isosceli ma che non lo sono!

Secondo la linea (B), i parallelogrammi non sono trapezi. Questo per l'ipotesi stringente "con due soli lati paralleli". Da un certo punto di vista, questa ipotesi sottrattiva richiama la definizione XXII di Euclide secondo la quale, ad esempio, i quadrati non sono rettangoli perché Euclide "toglie" ai rettangoli la proprietà di essere equilateri (così come "toglie" ai rombi la proprietà di essere equiangoli). Nella nostra visione moderna della geometria, la definizione (B) ha dell'attrito. Tranne che per il fatto di avere le basi congruenti, i rettangoli hanno tutte le caratteristiche dei trapezi isosceli.

Domanda: è possibile definire i trapezi in modo che i parallelogrammi siano trapezi e i rettangoli siano trapezi isosceli?

La risposta è a mio parere affermativa ed è data da queste definizioni che (con la terza alla quale arriveremo tra poco) formano la linea (D).

- ✓ Un trapezio è un quadrilatero che ha due lati paralleli. I due lati paralleli si chiamano basi. I due lati non paralleli si chiamano lati obliqui o semplicemente lati.
- ✓ Un trapezio rettangolo è un trapezio che ha uno dei lati perpendicolare alle basi.

Prima di procedere a definire i trapezi isosceli consideriamo le seguenti condizioni per un trapezio qualsiasi:

- 1) Avere i lati obliqui congruenti
- 2) Avere gli angoli adiacenti a una base congruenti
- 3) Avere le diagonali congruenti

Queste condizioni sono legate da un teorema che potremmo chiamare ciclico.

Teorema ciclico di caratterizzazione dei trapezi isosceli

Dato un trapezio, se sono soddisfatte due delle condizioni 1), 2) e 3), allora è soddisfatta anche la terza.

$$1) + 2) \Rightarrow 3) \quad 3) + 1) \Rightarrow 2) \quad 2) + 3) \Rightarrow 1)$$

Pertanto possiamo scegliere una coppia qualsiasi di queste condizioni per definire i trapezi isosceli. Ad esempio:

- ✓ Un trapezio isoscele ha i lati obliqui congruenti e gli angoli adiacenti a una base congruenti.

Da questa definizione segue che i trapezi isosceli possono essere suddivisi in due insiemi disgiunti: quello dei trapezi isosceli che hanno basi non congruenti e quello dei rettangoli.

La definizione proposta può essere ulteriormente alleggerita grazie al seguente teorema.

Teorema Un trapezio che ha gli angoli adiacenti a una base congruenti è isoscele.

Dimostrazione Se gli angoli adiacenti a una base sono retti, il trapezio è un rettangolo e quindi è isoscele. Se invece non sono retti, prolunghiamo i lati obliqui fino a farli intersecare nel punto V. Il punto V determina con ciascuna delle basi un triangolo isoscele (questo perché gli angoli adiacenti a entrambe le basi sono congruenti). I lati obliqui del trapezio sono differenze dei lati, rispettivamente congruenti, dei due triangoli isosceli. Dunque sono tra loro congruenti.

Pertanto proponiamo le definizioni (D').

- ✓ Un trapezio è un quadrilatero che ha due lati paralleli. I due lati paralleli si chiamano basi. I due lati non paralleli si chiamano lati obliqui o semplicemente lati.
- ✓ Un trapezio rettangolo è un trapezio che ha uno dei lati perpendicolare alle basi.
- ✓ Un trapezio isoscele ha gli angoli adiacenti alla base congruenti.

Non possiamo invece alleggerire la definizione facendo affidamento solo sulla congruenza dei lati obliqui, perché un trapezio con i lati obliqui può essere tanto un trapezio isoscele quanto un parallelogramma, che isoscele non è perché non soddisfa le condizioni 2) e 3).

Come mai questa asimmetria tra lati e angoli?

Nel nostro ragionare sulla geometria sintetica siamo portati a dare maggior ruolo ai lati. Solo nella classificazione dei triangoli (che sono rigidi) le definizioni date con i lati coincidono a quelle date con gli angoli. Potremmo schematizzare questa corrispondenza così: disuguaglianze tra i lati \leftrightarrow disuguaglianze tra gli angoli (opposti).

Per i quadrilateri, le cose si articolano molto.

La mia impressione è che la “natura” dei trapezi si esprima meglio nei termini degli angoli piuttosto che in quelli dei lati.

Per questo possiamo formulare una nuova linea (D*) di definizioni equivalenti a quelle di (D) e che fanno riferimento ai soli angoli.

- ✓ Un trapezio è un quadrilatero che ha due angoli adiacenti a uno stesso lato supplementari.
- ✓ Un trapezio rettangolo è un quadrilatero che ha due angoli adiacenti a uno stesso lato retti.
- ✓ Un trapezio è isoscele se ha due coppie di angoli adiacenti a uno stesso lato congruenti.

Nonostante le tre linee (D), (D') e (D*) siano equivalenti, non proporrei di usare la (D*) che, pur più intrinsecamente corretta, è troppo lontana dall'abitudine d'uso degli insegnanti e degli studenti.

La più adatta alla didattica è probabilmente la (D) che pure è una versione ridondante della (D').