

Daniele Gouthier

# A COSA SERVE LA MATEMATICA

(febbraio 2007)

[1]

## Qualche volta abbiamo un problema

Nella vita di tutti i giorni ci troviamo spesso davanti a problemi che dobbiamo risolvere.

Possono essere piccolissimi:

*Questa mattina mi sono svegliato e tutto  
assonnato non riuscivo ad aprire il barattolo  
della marmellata.*

Oppure molto grandi:

*La mia famiglia è cresciuta, abbiamo bisogno  
di una casa nuova e con mia moglie decidiamo  
di costruircela.*

Possono richiedere tanto tempo:

*Ho perso la patente e devo rifarla.*

Ma anche poco:

*Sto facendo una torta e mi manca il  
cioccolato fondente da grattare.*

Possono essere facili:

*Devo traslocare tutti i miei CD e ho bisogno di  
recuperare delle scatole adatte per il trasporto.*

Così come molto difficili:

*Voglio smettere di fumare.*

Possiamo avere bisogno di aiuto:

*Per aprire un negozio, mi conviene chiedere  
un prestito alla banca o usare i miei risparmi?*

O invece li sappiamo risolvere da soli:

*Ho forato! Devo cambiare la gomma.*

E così via.

In ogni caso quello che ricerchiamo per un problema è la soluzione. Siamo soddisfatti quando il barattolo si apre, la casa è costruita, abbiamo di nuovo la patente, troviamo il cioccolato...

Ogni problema ha la sua soluzione o meglio *una* sua soluzione. E ci sono anche problemi che non ne hanno alcuna:

Assistere alla finale dei Mondiali di calcio  
del 2106 è per me un problema senza  
soluzione.

## Come ci liberiamo di un problema?

A ben pensarci, possiamo descrivere un percorso standard per affrontare un problema. Ad esempio attraverso quattro tappe:

1. Riconoscere che c'è un problema.

*Vivo fuori città e per abitudine vado a lavorare in macchina. Tutte le mattine perdo almeno mezz'ora per cercare parcheggio. È uno spreco di tempo e mi causa un certo stress.*

2. Capire cosa intendiamo per una soluzione di quel problema.

*Sono a disagio in una stanza molto affollata. Ci sono molti fatti che non mi piacciono, ma qual è quello che mi dà veramente fastidio?*

*L'affollamento o piuttosto il rumore? Il caldo o la mancanza d'aria? Il fatto che tutti parlano assieme o quello che non conosco nessuno? Il buio o la puzza di fumo?*

3. Riuscire a descrivere il problema in modo da chiarirlo a noi stessi e da comunicarlo ad altri.

*Vado dal medico perché ho un qualche malessere, mi sento tutto indolenzito, ho anche qualche fitta alla pancia ma non so spiegare meglio cosa mi succede.*

Spesso basta raccontare a qualcuno un problema per trovare una soluzione: non ti è mai capitato?

*È da mezz'ora che cerco le chiavi. Com'è possibile? Sono appena rientrato e devo averle appoggiate da qualche parte! Ti sarà sicuramente capitato di essere in questa situazione. Poi arriva qualcuno, la mamma, una sorella, un amico e gli racconti tutti i tuoi spostamenti. Mentre gli parli, "vedi" dove hai messo le chiavi. Ti è bastato raccontarlo per rivivere la situazione e venirne a capo.*

4. Trovare una soluzione.

## Capire quando saremmo soddisfatti

Il primo passo da fare è riconoscere che siamo davanti a un problema. Naturalmente, ciò che è un problema per me non è detto che lo sia per te che leggi. Decidere che una situazione è problematica è molto soggettivo, molto personale.

In particolare, abbiamo un problema, quando sentiamo l'urgenza di uscire da una certa situazione. Se non apro il barattolo di marmellata, la mia giornata inizia con mezza colazione. Se non costruiamo la nuova casa, la nostra famiglia vive male. Con la gomma a terra, non arrivo all'appuntamento. Ma questo non basta, potrei benissimo accettare questi disagi. In fondo ci sono molte situazioni nelle quali lo facciamo. Ciò che ci fa sentire che abbiamo un problema è l'urgenza di uscire da una situazione spiacevole, il bisogno di non sopportare oltre quel disagio: se ci fai caso, quando parli di un problema spesso dici "devo", "ho bisogno", "mi serve".

Pertanto, quando abbiamo un problema è molto facile che sappiamo di averlo (infatti abbiamo bisogno di qualcosa) e quindi che vogliamo trovare una soluzione. In qualche caso vogliamo che siano gli altri a trovarla per noi!

Che la cerchiamo in prima persona o che la deleghiamo ad altri, l'importante è capire quale soluzione ci soddisferà. Torniamo nella stanza affollata che ci mette a disagio e gridiamo "zitti!". Se non è il rumore a darci fastidio e se non è neanche il fatto che tutti stanno parlando contemporaneamente, il nostro fastidio non calerà. La prima cosa da fare è capire quale tipo di soluzione potrebbe andarci bene: essere da un'altra parte? Avere qualcuno con cui stare, con cui parlare? Rinfrescare l'ambiente?

Attenzione! Aver capito quale tipo di soluzione ci andrebbe bene, diciamo per esempio rinfrescare l'ambiente, non è ancora aver capito come realizzarla né tanto meno averla effettivamente realizzata.

Però è un passo avanti importante.

## Le vie che possiamo battere

Come abbiamo visto, le situazioni problematiche possono essere moltissime e di tanti tipi diversi. Le soluzioni possono non apparirci così chiaramente e anche se pensiamo di conoscerle non è detto che riusciamo a raggiungerle.

Ma allora, su cosa possiamo contare?

Semplificando molto abbiamo davanti a noi due vie:

1. Ricorrere all'esperienza. Cioè rifarci a qualcosa che è già successo in passato.
2. Battere una strada del tutto nuova. Cioè avere spirito d'innovazione.

Ricorrere all'esperienza può voler dire che ci dobbiamo riferire a situazioni che abbiamo vissuto molte volte e allora abbiamo dalla nostra qualche routine che conosciamo bene e che possiamo utilizzare:

*Per far bollire il latte, sappiamo di dover prendere il pacchetto dal frigo, il pentolino dall'armadio, versare il latte nel pentolino, aprire la manopola del gas...*

Ma può anche voler dire scavare nella memoria fino a quell'unica volta in cui ci siamo trovati in una situazione analoga:

*L'altra volta che ho forato una gomma, ho trovato il cric nel vano motore sulla sinistra ed era attaccato con una vite scomoda da togliere...*

E ci sono anche situazioni nelle quali dobbiamo fare affidamento sull'esperienza di altre persone:

*Mio padre per smettere di fumare si è rivolto  
a...*

O addirittura leggere casi generali riportati in libri, articoli, pubblicazioni:

*Ho visto un opuscolo dell'associazione dei  
commercianti che consigliava di chiedere un  
prestito alla banca perché...*

Infine, ricorrere all'esperienza può voler dire sapere imparare dagli errori:

*L'ultima volta che un barattolo non si apriva,  
ho fatto leva con un coltello. Si è rotta la lama e  
mi sono tagliato.*

Da non ripetere!

E che dire dell'innovazione? È innegabile che ci sono situazioni nelle quali l'esperienza non riesce ad aiutarci: può essere che noi non ne abbiamo abbastanza, ma può anche essere che il problema sia veramente nuovo e che quindi nessuno sappia che pesci pigliare. Come si fa a battere una strada del tutto nuova? Come ci si orienta?

Qui gli strumenti sono essenzialmente due: la fantasia o il metodo.

Avere metodo vuol dire essere capaci di suddividere il problema in tante situazioni più limitate e quindi più semplici da affrontare. In modo che di ciascuna di queste sia più facile

capire le conseguenze e quindi tenere sotto controllo i risultati. Ovviamente, la suddivisione del problema funziona solo se tutte le situazioni messe assieme ci ridanno il problema iniziale!

*Per cambiare la ruota devo: mettermi in condizioni di sicurezza, procurarmi tutti gli strumenti, capire come funziona ciascuno di questi, stabilire l'ordine delle azioni da fare, fare la prima azione...*

Usare la fantasia, o la creatività, è invece un po' un salto nel buio. Bisogna mettere assieme ciò che si sa già con ciò che non si sa ancora. Bisogna farsi forti delle proprie capacità per aggirare gli ostacoli. Bisogna provare e verificare i risultati di ogni prova. Un po' come quando fai un disegno: ogni tanto ti fermi, alzi la testa e vedi se sei soddisfatto, se sulla carta c'è quello che avevi in testa. O almeno qualcosa che ti piace.

*Sto facendo una torta e mi manca il cioccolato fondente da grattare. Scendo e scopro che il supermercato è chiuso. Così provo a fare la crema con il cacao al posto del cioccolato grattugiato. L'assaggio e scopro che è ancora più buona.*

## Gli strumenti per descrivere il nostro problema

Il passaggio successivo è quello di descrivere il nostro problema in modo da chiarirlo a noi e agli altri. Bada bene: non esistono descrizioni che vanno bene per tutti i problemi. Ognuno ha la sua. E non è neanche detto che, di fronte allo

stesso problema, io e te lo descriveremmo allo stesso modo. Dare una descrizione è una parte del cammino verso una soluzione e se voglio che tu risolva un problema devo accettare la tua descrizione.

*Potrebbe essere un esercizio interessante raccogliere i modi che ci sono nei diversi paesi del mondo per fare le operazioni, anche solo somme e moltiplicazioni. Si trovano strategie, tecniche, trucchi molto diversi tra loro ma che celano la comprensione di un particolare aspetto, di una particolare proprietà dell'operazione stessa. Ciascuno è a tutti gli effetti una descrizione diversa, che contiene sapienze, conoscenze e culture diverse dalla nostra.*

Detto questo, è anche vero che ci sono alcuni strumenti potenti che sarebbe poco prudente ignorare: il rischio è di riscoprire l'acqua calda oppure di spendere molto tempo per fare qualcosa che altri hanno già fatto o, peggio ancora, di non essere in grado di arrivare a una soluzione.

Ovviamente, quelli che ti propongo non sono strumenti concreti, oggetti o macchine, ma piuttosto idee, modi di pensare, procedure. Tra gli strumenti che abbiamo a disposizione ci sono:

**1. Il ragionamento "se... allora..."** non è altro che la capacità di pensare alla situazione in cui ci troviamo e provare ad analizzarla dal punto di vista delle conseguenze.

*Se tolgo la ruota forata prima di aver messo il cric, la macchina s'inclina da una parte, mi trovo in pericolo e ho enormi difficoltà a mettere la ruota di scorta.*

*Se rompo sul tavolo il barattolo di marmellata, è vero che riesco a mangiarne un po' per quella colazione, ma devo anche buttarne via una gran parte che si mischia ai vetri rotti.*

Questo tipo di ragionamento permette di escludere a priori alcune scelte e di indicarci *quello che non* dobbiamo fare.

2. **I diagrammi di flusso** sono uno strumento tipico dell'informatica, ma possono essere applicati in situazioni molto diverse. Permettono di descrivere un problema, dividendolo in tante azioni elementari che *possono* accadere. Sono un modo grafico di rappresentare tante implicazioni "se... allora..." tutte assieme in una struttura che tiene conto di tutti i casi possibili.

*Devi telefonare a un amico. Prova a descrivere tutte le azioni che possono esserci in questa situazione e prova a collegarle con delle frecce. Se un'azione ha una sola conseguenza, ci sarà una sola freccia che collega l'azione alla conseguenza. Se un'azione ha due conseguenze (il telefono dell'amico è libero/occupato), ci sono due frecce che vanno ai due casi diversi...*

3. **Gli esempi di buone pratiche** sono un serbatoio formidabile di possibilità. È importante che tu conosca scelte che hanno portato al successo in altre situazioni che per qualche verso sono simili.

*Voglio smettere di fumare. Non conosco nessuno che l'ha fatto. Però mio zio era alcolista ed è riuscito a venirne fuori grazie a un gruppo di auto-aiuto. Quindi...*

4. **I modelli** sono delle rappresentazioni elementari di situazioni diverse ma tutte simili e che pertanto possono essere affrontate più o meno allo stesso modo.

*In alcuni supermercati cercano di affrontare il problema delle code alle casse. Una soluzione è dare al cliente un dispositivo che legge i codici a barre in modo che sia lui stesso a caricare i prezzi di quello che compra. Chi lo fa ha diritto a una cassa apposta per lui e che quindi è molto più veloce: in cambio di un piccolo lavoro risparmia del tempo. Se ci pensi è la stessa situazione di chi accetta di avere un telepass in automobile in modo da poter transitare quasi senza fermarsi al casello: in cambio di un piccolo abbonamento risparmia del tempo. In entrambi i casi, il cliente e l'autista scelgono di farsi carico di una parte del lavoro della cassiera e del casellante per risparmiare tempo.*

5. **Le equazioni** sono il più semplice dei modelli. Infatti, riuscire a scrivere un'equazione non è altro che rappresentare un problema con pochi simboli schematici. Questo ti permette di concentrarti sui soli simboli ignorando cosa rappresentano. Una volta che avrai trovato la soluzione *simbolica*, dovrai solamente ritradurla nei termini del tuo problema.

*Per fare sei crêpes hai utilizzato tre uova. Ma oggi devi farne otto. Quante uova ti servono? Scrivere la proporzione  $6:3 = 8:x$  vuol dire aver sostituito il numero di uova che devi usare con il simbolo  $x$  e averlo collegato alla tua esperienza con un'equazione. Alla fine, la soluzione*

*simbolica  $x=4$  si traduce in un concretissimo numero di uova.*

## E finalmente cerchiamo di risolverlo!

La scelta di una descrizione del problema invece che un'altra ci guida già nella direzione di una soluzione.

Ovviamente la rappresentazione del problema non fornisce la soluzione tutta e subito. Ma permette di andare oltre alla situazione concreta per usare l'esperienza o l'innovazione e per astrarre almeno un po' da quel preciso problema per considerarne solo gli aspetti problematici.

È per questo che serve aver chiara la descrizione del problema: senza di questa rischiamo di battere false vie e di non muoverci in una direzione giusta.

Spesso una buona descrizione riesce a dirci se il problema ha o non ha soluzione, anche prima di dirci quale questa sia. O ancora: può dirci se *la* soluzione è unica o piuttosto se è *una* delle soluzioni possibili.

Può sembrar strano ma una volta capito che un problema è un problema i due passi più difficili sono capire quale soluzione ci soddisfa e descrivere in modo chiaro il problema per cercare di trovarla. La ricerca vera e propria delle soluzioni è spesso un fatto tecnico nel quale siamo aiutati da libri, manuali o semplicemente dagli altri.

Una delle cose che succede con una certa frequenza è che quando abbiamo rappresentato un problema ci accorgiamo che un problema precedente aveva una rappresentazione analoga, addirittura molto simile. In questo caso, non resta che

provare a ripercorrere il procedimento che ha portato alla soluzione del problema precedente per risolvere quello che abbiamo per le mani.

## Ma cosa c'entra la matematica?

La matematica si sa ha a che fare con i problemi. Ma normalmente siamo abituati a vederla occuparsi di punti e di rette, di triangoli e di quadrati, di numeri e di frazioni, di espressioni letterali e di polinomi. Su questi e su altri oggetti ancora più astrusi costruisce i suoi problemi.

Ma le cose stanno proprio così?

La matematica ha bisogno di costruirsi problemi nuovi? O piuttosto si occupa dei problemi nei quali effettivamente c'imbattiamo?

Né l'uno né l'altro. La matematica cerca di darci gli strumenti per affrontare i problemi e cerca di darceli nel modo più generale possibile. Spoglia ogni elemento che appare in un problema di tutte le caratteristiche concrete, vere, quotidiane per considerarne solo gli aspetti che servono alla descrizione e quindi alla soluzione.

*Se vuoi misurare l'altezza di una montagna hai il problema che una volta in cima non riesci ad avere veramente una retta verticale che scende dalla vetta. Il versante non è regolare ed è difficile fare dei calcoli. Ci sono rocce, alberi, discese e risalite. Tutto ti ostacola. La matematica astrae da questo e vede solo angoli e triangoli, proporzioni e figure che si assomigliano. Questi diventano gli strumenti della descrizione che*

*porterà alla soluzione, come vedrai tra un po' con lo studio della geometria e della trigonometria.*

La matematica passa dal concreto all'astratto, a tal punto che può dimenticarsi delle situazioni concrete di partenza.

Astrazione significa capacità di avere a che fare con le *rappresentazioni dei problemi* anche senza dover far riferimento ai problemi veri e propri. Non importa da quale problema si parte e neppure se a una stessa rappresentazione si arriva da due problemi diversi. La matematica prende una rappresentazione e su questa studia, costruisce, ragiona.

*Quando è chiaro che le equazioni rappresentano tanti problemi, ben di più delle uova per le crêpes, la matematica ignora tutti i problemi che si possono rappresentare con equazioni e considera solo le equazioni. E lo stesso fa con la logica del "se... allora...", con i diagrammi di flusso, con i modelli e così via.*

E poi c'è una seconda caratteristica: la matematica tende a passare dai casi particolari alle teorie generali. Cerca cioè di togliere dalle rappresentazioni tutti gli elementi superflui fino a tenerne soltanto lo scheletro fondamentale ed è di questi scheletri essenziali che si occupa. Perché perdono man mano le loro specificità di casi particolari per diventare gli oggetti e i protagonisti di teorie matematiche più generali.

La matematica ama risolvere molti problemi in un colpo solo ed è per questo che in tante sue branche svariate situazioni sono rappresentate da pochi simboli schematici.

I simboli, ad esempio le lettere del calcolo letterale, non rappresentano più solo le uova in cucina ma rappresentano delle idee astratte che di volta in volta possono essere usate

con le uova, le automobili, gli abitanti di una città e via elencando.

Le soluzioni simboliche valgono del tutto in generale e a noi non resta altro che prendere il nostro problema e dargli una qualche rappresentazione.

Scelta questa, le soluzioni vengono da sé.

Grazie alla matematica.