Daniele Gouthier

A CACCIA DI UN PUNTO NOTEVOLE

(maggio 2016)

[1]

---

[1] Apparso in Invito alla natura, nella rubrica 5 minuti di matematica

La discussione che propongo è una traccia interessante per "fare un po' di matematica" alla fine della seconda media. Possiamo provare a usarla per due o tre ore di discussione in classe. Il meglio è proporre il problema e dedicare una prima ora a fare qualche tentativo raccogliendo i suggerimenti e le congetture dei ragazzi. Quindi invitarli a pensarci a casa e nelle lezioni successive (mentre procediamo con il resto del corso) chiedere loro se hanno fatto passi avanti e quali. Alla fine possiamo usare altre due ore per provare a sviluppare con i ragazzi una discussione che arrivi all'individuazione del punto che risponde alla domanda.

Qualche tempo fa, sulla lista di discussione matematica Cabrinews, Rita Serafini ha lanciato una domanda: il punto del piano per il quale è minima la somma delle distanze dai lati di un triangolo è un punto "notevole"?

Mumble mumble.

Per cominciare ho cercato di capire quali fossero i termini del problema.

Prima l'ho riformulato un po': il punto di un triangolo per il quale è minima la somma delle distanze dai lati è un punto "notevole"?

Poi me lo sono visto suddiviso in due sottoproblemi:

- ✓ Come possiamo calcolare la somma delle distanze di un punto di un triangolo dai lati?

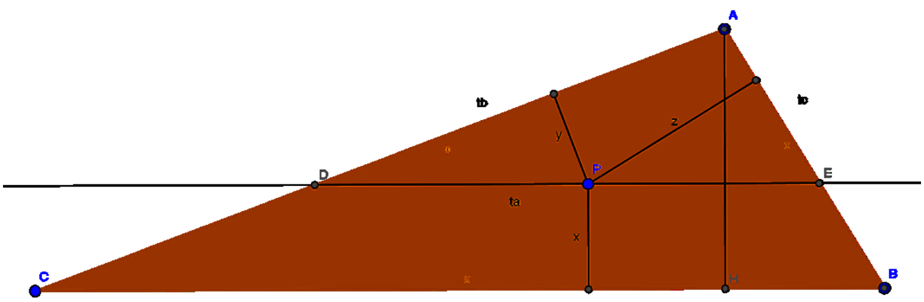
- ✓ Per quali punti questa somma ha il minimo valore possibile?

A pensarci è un problema non facile: ho fatto qualche disegno, qualche conto e non ho trovato subito una via – tanto per chiarezza, ci ho messo cinque giorni a formulare una soluzione che mi soddisfacesse e di questi giorni, tre sono passati a rigirarmi in testa un'idea che non sapevo dimostrare. L'idea era: il punto che rende minima la somma delle sue distanze dai lati probabilmente è il vertice opposto al lato maggiore. Mi sembrava ragionevole, ma era solo una congettura, dal momento che non avevo alba di una via per dimostrarla. E senza dimostrazione l'idea lascia un po' il tempo che trova.

1) Un passo importante è stato, come quasi sempre accade, fare il disegno: perché quando faccio un disegno, devo ragionare su come chiamare gli elementi della figura e questa scelta non è neutrale ma indica alcune vie e ne esclude altre.

La prima scelta che ho fatto è stata quella di ordinare i lati dal maggiore al minore: $a \geq b \geq c$.

In questo modo le altezze relative ai lati sono ordinate dalla minore alla maggiore: infatti i prodotti ah, bk, cl sono tutti uguali ed esprimono il doppio dell'area del triangolo.



In figura ho poi segnato:

Current Address : via Puccini, 26 – 34078 Sagrado GO (Italy) Phone +39 3338189121 Skype: gouthier.daniele

- ✓ un punto P con le sue tre distanze dai lati (x, y e z)
- ✓ l'altezza h relativa al lato maggiore a
- ✓ la retta DE parallela al lato a

Mi è sembrato utile esplicitare la misura tb del lato AD, dove t è un numero compreso tra 0 e 1: quando t=0, la parallela passa per il vertice A; quando t=1, la parallela contiene il lato a.

2) L'area del triangolo può essere espressa in un modo interessante ricorrendo al punto P interno al triangolo. Infatti possiamo suddividere ABC nei triangoli APC, BPC e APC. Allora l'area di tutto il triangolo è la somma delle loro tre aree.

Per non dovermi portare dietro un "fratto 2" che non cambia la natura delle cose, qui scrivo l'uguaglianza tra le due espressioni del doppio dell'area.

$$ax + by + cz = ah$$

Se sostituisco a b e a c il valore a trovo una disuguaglianza sempre vera.

$$ax + ay + az \geq ah$$

$$x + y + z \geq h$$

Ho quindi un primo risultato.

Comunque prendo un punto P del triangolo, la somma delle sue distanze dai lati è maggiore dell'altezza relativa al lato maggiore (che è la minore delle tre altezze).

Inoltre, c'è almeno un punto per cui la somma delle distanze è esattamente h: è il vertice A.

3) Ora mi sono concentrato sul triangolo AED che è simile ad ABC in un'omotetia di centro A e rapporto t. Dunque il doppio della sua area può essere espresso come t^2ah.

D'altra parte AED si suddivide nei due triangoli APD e APE. Quindi il doppio della sua area è anche $tby + tcz$.

Poiché le due espressioni sono vere abbiamo la seguente uguaglianza.

$$by + cz = tah$$

Tutto questo grazie alla similitudine dei due triangoli.

Osserviamo anche che la similitudine lega x e h: $x = (1-t)h$.

4) Ora ho supposto che P fosse un punto per il quale la somma delle distanze vale proprio h: $x + y + z = h$.

Quindi $y + z = h - x = h - (1-t)h$.

$$y + z = th$$

Moltiplico questa uguaglianza una volta per b e una volta per c e collegarla all'uguaglianza $by + cz = tah$.

$$\begin{cases} by + cz = tah \\ by + bz = tbh \end{cases} \qquad \begin{cases} by + cz = tah \\ cy + cz = tch \end{cases}$$

E faccio le due sottrazioni.

$$(c-b)z = t(a-b)h \qquad (b-c)y = t(a-c)h$$

Notiamo che le differenze nelle parentesi sono tutte positive tranne una: $c - b \leq 0$.

5) E adesso siamo pronti per concludere: ci basta analizzare cosa succede alle due uguaglianze nei vari casi possibili.

$a = b = c$, il triangolo è equilatero. Le due uguaglianze sono vere per ogni t, per ogni y e ogni z.

In un triangolo equilatero, ogni punto ha somma delle distanze dei lati uguale all'altezza del triangolo, cioè minima.

$a = b > c$, il triangolo è isoscele acutangolo. La prima uguaglianza diventa $(c - b)z = 0$ e quindi deve essere z=0. Il che significa che P è uno qualsiasi dei punti della base c.

In un triangolo isoscele acutangolo, ogni punto della base ha somma delle distanze dei lati uguale all'altezza del triangolo, cioè minima.

$a > b = c$, il triangolo è isoscele ottusangolo. Le due uguaglianze sono vere solo se t=0, ovvero per P=A.

In un triangolo isoscele ottusangolo, il vertice opposto alla base è l'unico punto la cui somma delle distanze dei lati è uguale all'altezza del triangolo, cioè minima.

$a > b > c$, il triangolo è ottusangolo. La prima uguaglianza ha un membro minore uguale a zero e l'altro maggiore o uguale a zero. Per essere vera devono essere t=0 e z=0. Il valore t=0 inserito nella seconda ci dà anche y=0.

In un triangolo scaleno, il vertice opposto al lato maggiore è l'unico punto la cui somma delle distanze dei lati è uguale all'altezza del triangolo, cioè minima.

Current Address : via Puccini, 26 – 34078 Sagrado GO (Italy) Phone +39 3338189121 Skype: gouthier.daniele