

Frazioni: vedere le operazioni

Daniele Gouthier

SISSA, Trieste e ISIA, Pordenone; autore Pearson

Dividere è un'operazione concettualmente più sofisticata che sommare, sottrarre o moltiplicare. La divisione ha alcuni risultati possibili a seconda dell'accezione che diamo al verbo dividere. Prendiamo come esempio la divisione tra 11 (dividendo) e 4 (divisore).

1 Possiamo fare tante parti quanto è il divisore: ci sono situazioni reali nelle quali è equo comportarsi così. Naturalmente una divisione in “parti diverse” ci porta verso problemi matematici non sempre facili da risolvere. Sostanzialmente dobbiamo rispondere alla domanda “in quanti modi possiamo trovare 4 fattori la cui somma dia 11?”

Oppure possiamo fare un'ipotesi restrittiva e decidere di dividere in “parti uguali”. Davanti a noi abbiamo almeno quattro possibili accezioni del verbo dividere.

2 *Divisioni euclidee*. Le parti uguali sono gruppi di unità: ci sono situazioni reali nelle quali è necessario rispettare l'unità dell'unità. Allora nella divisione tra 11 e 4 ottengo un quoziente (2) che conta i gruppi e un resto (3) che indica quante unità escludo. Rispondiamo alla domanda “quanti gruppi da 4 posso fare al massimo con 11 elementi?”

3 *Rapporti e numeri decimali*. Le parti uguali sono il risultato di un confronto: ci sono situazioni reali nelle quali è utile misurare con precisione arbitraria. Allora nella divisione tra 11 e 4 ottengo 2,75 che esprime il rapporto tra dividendo e divisore. Rispondiamo alla domanda “quanti 4 servono a formare un 11?”

4 *Percentuali*. Il rapporto tra dividendo e divisore è dato come percentuale: ci sono situazioni reali nelle quali ci serve una scrittura generale che metta in relazione due rapporti qualsiasi. Allora la divisione tra 11 e 4 dà 27,5%, che esprime in modo “universale” il rapporto tra dividendo e divisore. Rispondiamo alla domanda “fatto 100 il mio intero, 4 che parte è di 11?”

5 *Frazioni*. Possiamo considerare le parti come “nuove unità”: ci sono situazioni reali nelle quali è significativo considerare le fette di un intero. Allora nella divisione tra 11 e 4 ottengo un nuovo numero, $11/4$, che conta – o enumera – il numero di fette (11) chiamate – o denominate – quarti, $1/4$. Rispondiamo alla domanda “quanti quarti formano un 11?”.

È significativo mostrare che le ultime tre accezioni sono equivalenti e rappresentano, da angolazioni diverse, la risposta alla stessa domanda. Questo deve essere il nostro punto di partenza.

Il passo che possiamo muovere da qui è la visualizzazione delle frazioni, ad esempio, di un rettangolo. Dividendo uno stesso rettangolo secondo frazioni diverse possiamo dedurre alcuni concetti:

- ✓ l'esistenza di frazioni equivalenti;
- ✓ l'equivalenza tra la "frazione di frazioni" e il prodotto di frazioni;
- ✓ alcune addizioni particolari, che ci permettono di fare inferenze sull'addizione in generale.

L'obiettivo non è usare le immagini come esempi delle proprietà delle frazioni. Piuttosto di proporre vere e proprie "dimostrazioni senza parole" del comportamento delle frazioni. Non diremo "dato che $2/4$ è equivalente a $1/2$, queste due figure sono uguali", ma "queste due figure evidentemente uguali ci mostrano che $2/4$ è equivalente a $1/2$ ".

La prassi che sperimenteremo consiste nel rimandare il più possibile l'introduzione di espressioni numeriche per le frazioni e dei calcoli fra di esse, a favore di una presentazione visuale e di una visualizzazione delle proprietà e delle operazioni tra frazioni. L'esibizione di calcoli attraverso immagini diventa quindi un punto di riferimento per ogni successiva trattazione, facendosi forte di un approccio iconico e di una facilità di richiamo che si fonda proprio sull'aspetto visuale dell'introduzione che proponiamo.

Le frazioni hanno questa potenzialità: fornirci una situazione concreta e gestibile nella quale possiamo introdurre concetti matematici "senza calcoli" (o meglio, rimandandoli un po'...), sottolineando la prevalenza dei concetti su meri calcoli. Perché in fondo la matematica è prima di tutto comprensione di idee nuove che descrivono (anche) la realtà che ci circonda, e solo sussidiariamente è il formalismo che ci diamo per comprenderle.