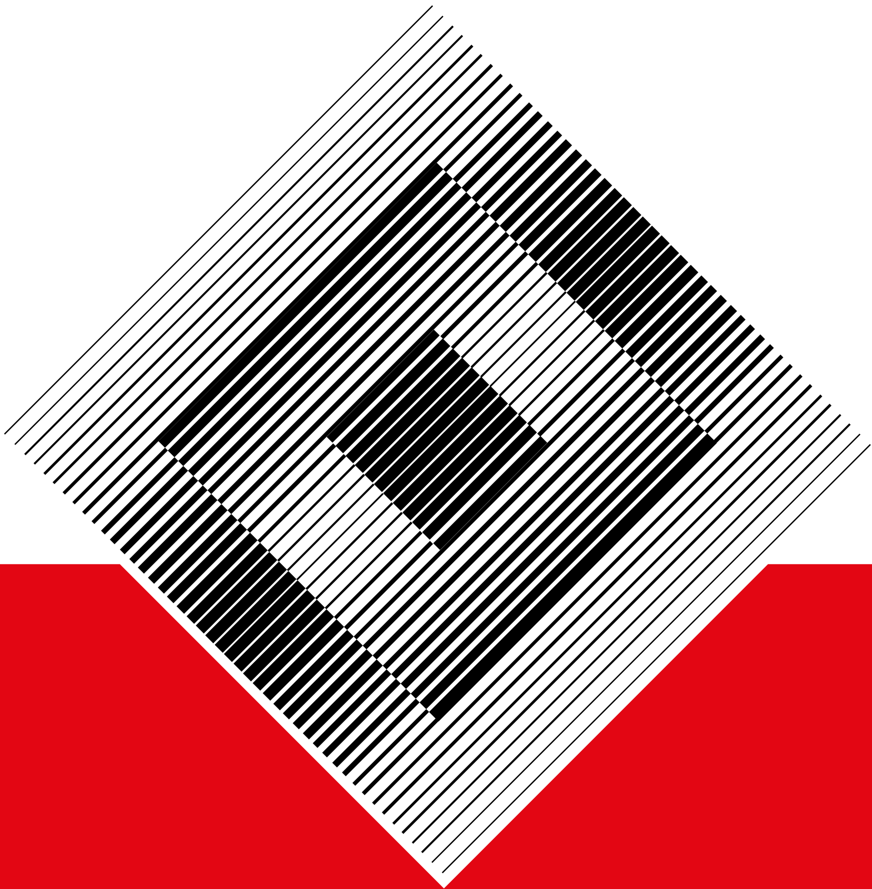
L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA E DELLE SCIENZE INTEGRATE

VOL. 44B N. 3 - GIUGNO 2021

Poste Italiane s.p.a. - Spedizione in Abbonamento Postale - D.L. 353/2003 - (conv. In L. 27/02/2004 n° 46)
art. 1, comma 1, NE/PD - Rivista mensile - Tiratura inferiore a 20.000 copie - Taxe Perçue



Organo del CENTRO RICERCHE DIDATTICHE UGO MORIN
Via S. Giacomo, 4 - 31017 PADERNO DEL GRAPPA (Treviso)

L'astrazione nei testi matematici

Sommario

Nell'apprendimento e nella comprensione della matematica, uno degli ostacoli è la gestione consapevole dell'astrazione. In questo articolo analizziamo le forme che l'astrazione può assumere in un testo matematico. Proponiamo quindi tre descrittori qualitativi che mirano a identificare alcune dimensioni dell'astrazione. Nella seconda parte dell'articolo applichiamo gli indicatori proposti alla lettura di alcuni testi diversi, tutti aventi un contenuto matematico classico ed elementare: il Teorema di Pitagora.

Abstract

In learning and understanding mathematics, one of the obstacles is the comprehension of abstraction. In this article we analyze the forms which abstraction can assume in a mathematical text. We therefore propose three qualitative descriptors that aim to identify some dimensions of abstraction. In the second part of the article, we apply the indicators proposed to the reading of some different texts, all dealing with a classical and elementary mathematical content: the Pythagorean Theorem.

Daniele Gouthier, Oscar Pizzulli

L’astrazione nei testi matematici

Daniele Gouthier[1], Oscar Pizzulli[2]

Un ostacolo alla comunicazione, un concetto da comunicare

La comunicazione della matematica assume forme diverse, tra queste ci sono la divulgazione e l’insegnamento. L’insegnamento ha come fine ultimo la comprensione e la capacità di far propria la matematica come strumento intellettuale e pratico. Molte però sono le occasioni nelle quali non possiamo, non vogliamo, o non è opportuno che insegniamo. La divulgazione si propone di creare consapevolezza attorno alla matematica, raccontare storie, delineare il modo di procedere della disciplina, ritrarre i matematici. Ci sono situazioni nelle quali accrescere questa consapevolezza è un obiettivo che occorre porsi.

Insegnamento e divulgazione – le due forme della comunicazione alle quali qui ci limitiamo – hanno in comune un prerequisito: il secondo attore, sia esso studente, lettore o ascoltatore, per “stare” nell’atto di comunicazione che gli porgiamo (corso, lezione, libro, conferenza, spettacolo ecc.) deve saper gestire un certo grado di astrazione. E, come ci dice Andrea Capozucca facendo il punto nel suo *Comunicare matematica* “l’astrazione dagli oggetti della nostra percezione è sempre stata una parte preponderante della matematica, che l’ha resa difficile da comprendere”, [Capozucca 2018].

La matematica cerca, a partire dalle ipotesi, il giusto livello di astrazione, dove “giusto” quasi mai significa nel “minimo delle ipotesi”, ma piuttosto al livello significativo per i risultati che si stanno perseguendo. Le osservazioni scientifiche ricercano invece il

[1] Docente di Comunicazione della matematica e della fisica presso il Master in Comunicazione della Scienza “Franco Prattico”, Sissa, Trieste, Italy. Direttore editoriale delle edizioni Scienza Express.
gouthier.daniele@gmail.com

[2] Redattore scientifico di Mondadori Education per le opere di fisica.
pizzulli.oscar@gmail.com

livello di generalizzazione che è possibile sulla base delle caratteristiche degli oggetti osservati.
L'astrazione quindi ha nella matematica caratteristiche sue proprie che ricoprono un ruolo centrale, non sempre costruttivo per la comunicazione. In questo articolo ci concentriamo sull'astrazione presente nel linguaggio matematico del quale sempre Capozucca dice che

> "è un'enorme conquista dell'umanità, ma le cose diventano più semplici se e solo se viene insegnato un nuovo livello di astrazione *quando* la persona sente la necessità dell'astrazione: altrimenti, è solo un vuoto formalismo".

Ogni linguaggio, anche quello della matematica, prende corpo nei testi. Stella Baruk, che sul rapporto tra linguaggio e matematica ha riflettuto, ricercato e lavorato, nell'introduzione al suo *Dizionario di matematica elementare* scrive che

> "per chi non ha ancora accesso al suo significato, la materialità scritta o parlata di un testo matematico, come quella di un testo in una lingua sconosciuta, costituisce ciò che io chiamo un "senza senso", cioè un senso in attesa di essere chiarito. Con l'avvertenza che questa chiarificazione mette in gioco dei fenomeni ben più complessi in matematica che in una lingua straniera e si distingue, a grandi linee, in un "senza senso di forma", che può riguardare una semplice lettera la cui funzione non è chiara, e in un "senza senso di fondo", che riguarda il sentimento di non-interesse, di non necessità d'essere di ciò che il testo esprime", [Baruk 1999].

Baruk individua quindi due mancanze di senso, l'una di forma che attiene ai simboli e ai segni, ma anche ai termini e alle metafore; e l'altra di fondo che coinvolge il senso che un testo ha per il lettore, e l'aderenza alla realtà che questo vi ravvede, o non vi ravvede: e, purtroppo, molti, che alla matematica legano i propri ricordi scolastici non sempre piacevoli, la considerano la disciplina che maggiormente studia oggetti ed enti lontani dalla realtà di tutti i giorni, [Lolli 2018].

Per i matematici gestire l'astrazione è parte della propria azione, diremmo addirittura che ne è parte qualificante, a tal punto che la distinzione tra astratto e concreto per loro è quasi senza significato. Per chi la matematica la vuole – o più spesso la deve – apprendere, attraverso l'insegnamento, o per chi desidera acquisirne consapevolezza e ascoltarne racconti, attraverso la divulgazione, non sempre è così. È quindi cruciale cercare di individuare gli elementi che possono facilitare l'accettazione e la gestione dell'astrazione, provando a descrivere come vengono usati in casi di comunicazione efficace.
Riferendoci alla distinzione proposta da Baruk, gli elementi dell'astrazione che andiamo a individuare attengono a:

- ✓ simboli e segni
- ✓ immagini e metafore
- ✓ esempi e casi concreti.

Nei primi due casi li studiamo per cercare di superare i "senza senso di forma", nel terzo i "senza senso di fondo". In [Pizzulli 2020], uno di noi ha proposto, attorno a questi elementi, tre descrittori dell'astrazione in un testo matematico. Qui li presentiamo applicandoli a un contenuto matematico elementare, il teorema di Pitagora, in alcune pagine estratte da libri di testo, saggi divulgativi e, per l'appunto, da una voce del *Dizionario* di Baruk, tutti testi di buona diffusione e consolidata reputazione:

A. Leonardo Sasso, *La matematica a colori*, edizione blu per il primo biennio, Petrini 2019, pp. 645-646

B. Anna Montemurro, *Math Genius*, corso di matematica, De Agostini 2015, pp. 282 e 284

C. Emma Castelnuovo, *La matematica/La geometria*, La nuova Italia 1979, pp. 66-71

D. Denis Guedj, *Il teorema del pappagallo*, Longanesi 1998, pp. 126-129

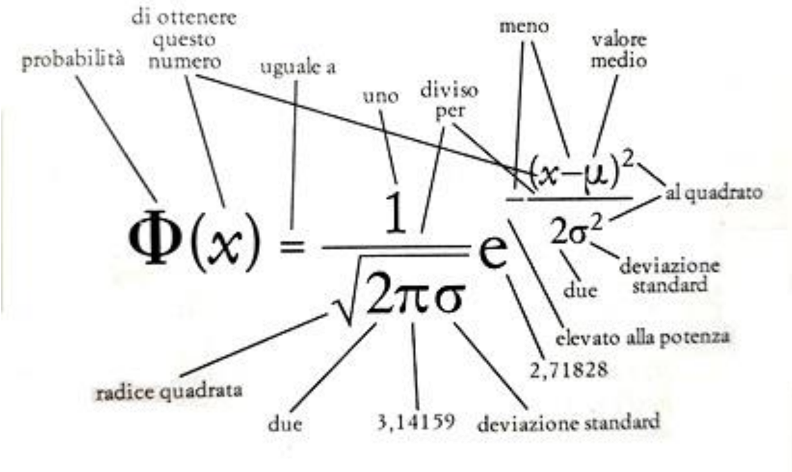
E. Simon Singh, *L'ultimo teorema di Fermat*, Rizzoli 1997, pp. 38-41

F. Stella Baruk, *Dizionario di matematica elementare*, Zanichelli 1999, pp. 410-413

Prima di commentare i sei esempi, riprendiamo la definizione dei descrittori e in che senso riteniamo possano essere una chiave di interpretazione del ruolo dell'astrazione in un testo matematico.

Forme semiotiche dell'astrazione

I segni matematici sono acceleratori concettuali, [Gouthier-Salvador 2006], grazie ai quali i matematici colgono a colpo d'occhio una quantità, e una qualità, di informazione che se dovessero essere rintracciate in un testo discorsivo richiederebbero un lavoro certosino di decostruzione e ricostruzione. Le formule matematiche sono un esempio di queste specificità dal momento che in esse ciascun segno fa riferimento a un preciso ente, e il modo con il quale i segni sono messi in relazione rispetta regole ben precise.
A mero titolo di esempio, osserviamo la densità informativa e concettuale della formula che rappresenta la distribuzione normale delle probabilità così come Ian Stewart la fa "esplodere" sotto i nostri occhi in una pagina di *Le 17 equazioni che hanno cambiato il mondo*. La compattezza della formula cela informazioni su informazioni che richiedono esperienza per essere lette e interpretate.



Una formula è una mappa concettuale comprensibile a quanti conoscono e maneggiano il formalismo matematico. Per evitare fraintendimenti i matematici hanno un sapere condiviso che non necessita di spiegazioni per comprendere cosa dice una formula. Leggere una formula significa andare al di là delle caratteristiche specifiche concrete di un singolo caso e riconoscere qualità universali e per l'appunto astratte.

Per i non esperti, invece, i segni possono avere interpretazioni diverse che scaturiscono dal proprio vissuto e delle proprie conoscenze, [Gouthier 2005]. Chi scrive di matematica non è né può essere consapevole di quale portato si frappone fra il testo e il singolo lettore. Deve quindi porre attenzione a quale astrazione è collegata e trasmessa da un segno. Non tutti i segni sono uguali. Possiamo riconoscerne diverse forme qualitative di astrazione, che articoliamo in quella che chiamiamo **tipologia semiotica** dell'astrazione in un testo matematico. Per semplificare potremmo dire che presentiamo le cinque forme della tipologia semiotica dalla "più" alla "meno" astratta, senza con questo voler introdurre una gradualità e dei livelli quantitativi, ma solo proponendo un sistema che analizzi questo tipo di astrazione in un testo.

I segni possono *somigliare* all'oggetto che rappresentano; possono *corrispondergli* e possono *descriverlo*. A seconda se facciano o meno ciascuna di queste tre azioni li differenziamo.

- ✓ S1. I **simboli** non mantengono alcuna somiglianza né corrispondenza con l'oggetto: il simbolo +, eredità della congiunzione latina et, un tempo utilizzata per indicare proprio la somma, ha ormai perso qualsiasi legame con il concetto rappresentato.

- ✓ S2. Anche gli **indici** non conservano una somiglianza con l'oggetto rappresentato, ma sono caratterizzati da una corrispondenza con esso. Un esempio è la coppia (x, y), che comunica l'idea di mettere insieme due quantità – e, se il lettore lo sa, di farlo in un ordine indicato – aiutando a svolgere nella mente quest'operazione.
- ✓ S3. Per le **icone** il legame è dato dalla somiglianza del segno con il concetto rappresentato, come nel caso dell'infinito, ∞, nel quale una linea chiusa senza un inizio e una fine rende l'idea di infinito, pur in assenza di una qualche descrizione del concetto stesso. Sono icone anche le formule matematiche, perché, come espresso dal filosofo Charles Sanders Peirce, hanno uno schema riconoscibile che rappresenta le relazioni tra i diversi elementi che le compongono.
- ✓ S4. Le **rappresentazioni grafiche** descrivono un oggetto per facilitarne la comprensione e l'interpretazione. È il caso di immagini, grafici e schemi. "Ogni concetto matematico è costretto a servirsi di rappresentazioni, dato che non vi sono "oggetti" da esibire in loro vece o a loro evocazione; dunque la concettualizzazione deve necessariamente passare attraverso registri rappresentativi che, per vari motivi, soprattutto se sono a carattere linguistico, non possono essere univoci", [D'Amore 2001].

- ✓ S5. Le **descrizioni puramente testuali** rinunciano a corrispondenza, somiglianza e a rappresentare visivamente un concetto e si concentrano su una descrizione che richiede la partecipazione attiva del lettore alla comprensione.

Leggere un grafico o uno schema può essere alla portata di più fruitori di quanto lo siano simboli, indici e icone, ma presenta il rischio di più fraintendimenti. Alcune immagini possono instillare nel lettore non esperto concezioni fuorvianti e idee sbagliate. Una descrizione puramente testuale, invece, richiede più disponibilità a mettersi in gioco (anche realizzando in prima persona rappresentazioni, icone, indici e simboli) da parte del lettore.

Forme metaforiche

La seconda categoria che introduciamo è quella della metafora. Ricorrere a metafore vuol dire da un lato rinunciare a un quid di rigore per far sì che il testo sia più efficace, nella ricerca di un equilibrio comunicativo tra rigore ed efficacia che uno degli autori ha descritto in [Gouthier-Ioli 2006]. Dall'altro, le metafore rendono "visibile" un concetto, ancorando entità astratte a immagini pregresse del lettore.

Se nella comunicazione orizzontale tra matematici lo sviluppo di un linguaggio comune riduce progressivamente il rischio di incomprensioni concettuali, nella comunicazione verticale, che coinvolge non esperti, restano ampie zone di ambiguità. La contrapposizione tra rigore e ambiguità è ben rappresentata dalla distinzione tra il linguaggio utilizzato dai matematici, ricco di formule e segni, e il linguaggio metaforico tipico degli scrittori e dei poeti. Secondo Joseph Mazur, lo scrittore gode di maggiore libertà e se ne può servire per suscitare emozioni a discapito dell'esattezza. L'esempio che propone è quello della metafora utilizzata da Joseph Conrad in *Cuore di tenebra* per descrivere il fiume Congo come un «*immenso serpente disteso con la testa nel mare*», in effetti il fiume Congo non è un serpente ma Conrad «*evoca tutti i tratti del maligno come entità strisciante e meschina*», [Mazur 2015].

Le metafore possono essere più o meno reali, più o meno vicine al lettore, più o meno interne alla disciplina. A seconda dei casi riconosciamo anche qui una varietà di **tipologie metaforiche** dell'astrazione in un testo matematico.

- ✓ M5. Metafore che si appoggiano su una **realtà vicina** al lettore
- ✓ M4. Metafore che si riferiscono a una **realtà lontana** dal lettore
- ✓ M3. Metafore prese dall'arte o **da discipline non scientifiche**
- ✓ M2. Metafore che parlano di **scienza** e di **matematica**
- ✓ M1. **Assenza** di metafore

Una metafora avvicina un oggetto nuovo, ignoto, a uno noto, e con questo avvicina il lettore al primo. Più il noto a cui si riferisce la metafora è vicino al lettore, più questi riesce a dare corpo all'oggetto astratto di cui la metafora vuole parlare.

Forme esemplificative

La terza leva che abbiamo in mano per lavorare sull'astrazione sono gli esempi. Generalmente gli esempi vengono impiegati per avvicinare al lettore un argomento che si ritiene distante. Più un esempio è vicino all'esperienza quotidiana, più l'argomentazione può considerarsi concreta e, di conseguenza, meno astratta.

Esempi fortemente calati nel mondo reale aiutano quei fruitori nei quali non si è ancora sviluppata una capacità di astrazione: una situazione verosimile, presa dall'esperienza quotidiana, può aiutare a comprendere concetti astratti. Gli esempi calati nel mondo reale, però, non sono tutti uguali. Alcuni, in virtù della propria generalità, sono più vicini all'esperienza comune dei lettori rispetto ad altri. Anche chi non ha mai guidato una macchina, comprende che la distanza tra due punti di una pista da corsa è un esempio di spazio percorso da un oggetto in movimento. Questo perché tutti hanno un'esperienza diretta o indiretta del moto di un'automobile.

Più l'esempio perde di generalità e diventa specifico di un certo ambito o di una categoria ristretta di persone, più è astratto. L'esempio della lotteria per spiegare il calcolo combinatorio è una

situazione calata nel mondo reale, ma non è scontato che tutti abbiano un'idea di come essa si svolga.
Rendendo ancora più specifico l'ambito di riferimento, si può ottenere una terza tipologia di esempi, ovvero quelli che si riferiscono alle discipline non scientifiche. Che la matematica abbia un ruolo centrale nello studio delle scienze naturali come la fisica o la chimica è, infatti, evidente ed è stato messo in luce in diverse opere come il saggio *L'irragionevole efficacia della matematica nelle scienze naturali* del fisico Eugene Wigner. Esistono però legami della matematica anche con forme artistiche come la musica o la pittura.
Poiché esempi tratti dalle discipline scientifiche e dalla matematica hanno piani semantici sovrapponibili possono essere raggruppati nella quarta tipologia.
Una quinta tipologia di esempi meno concreta, se paragonata alle precedenti, è data dai casi studio interni al contenuto di cui stiamo parlando. Immaginiamo di enunciare le proprietà dei triangoli. L'idea di triangolo, in questo caso, rappresenta il livello più alto di astrazione, mentre un triangolo particolare, preso per applicare le proprietà a un caso specifico, è l'esempio usato per rendere più chiara e comprensibile la spiegazione.
Proponiamo quindi queste **forme esemplificative** dell'astrazione in un testo matematico.

- ✓ E5. Esempi **vicini** al lettore e per lui **autentici**
- ✓ E4. Esempi che, per quanto reali, appaiono **forzati e non così vissuti**
- ✓ E3. Esempi tratti dall'**arte** o da **discipline non scientifiche**
- ✓ E2. Esempi tratti dalle **scienze** e dalla **matematica**
- ✓ E1. **Assenza** di esempi

Le forme semiotiche costituiscono il nucleo del pianeta astrazione, il nocciolo duro che sta alla base di molti dei funzionamenti concettuali della matematica. Quelle metaforiche sono il mantello, duttile e viscoso come tutti i mantelli e come il linguaggio sa essere. Gli esempi sono la crosta e, se felici, possono arrivare a essere humus sul quale germogliano nuove idee nella testa dei lettori. È da lì che comincia a prendere vita la comprensione della matematica. È lì che ci giochiamo molta della comunicazione, insegnamento o divulgazione che sia.

Esempi di un'astrazione che conosciamo "tutti"

Siamo pronti, ora, per vedere che aspetto ha il pianeta astrazione in prossimità di alcuni esempi testuali. L'obiettivo non è di "stilare una classifica" di chi tratta meglio o peggio l'astrazione, ma quello di soffermarci sulle diverse forme che questa può avere in un testo, in modo da avere una chiave di lettura che ci permetta di andare incontro alle esigenze del secondo attore della comunicazione.

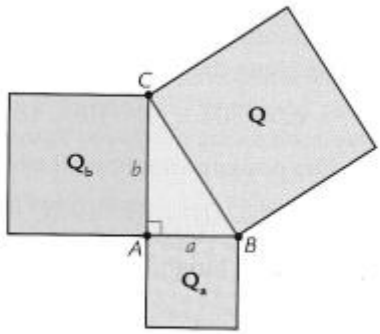
Come premesso, abbiamo scelto un contenuto matematico elementare e ben noto a tutti – il teorema di Pitagora – e abbiamo individuato tre manuali scolastici, due saggi divulgativi e un dizionario, che con modalità diverse l'hanno presentato[3].

Il punto non è sapere quanta astrazione c'è in un testo. Le nostre *forme* non sono delle metriche che confrontano l'astrazione presente con un'impossibile unità di misura. Sono strumenti per indagare qualitativamente come l'astrazione è comunicata da un testo.

Leonardo Sasso, *La matematica a colori*

Il quadrato costruito sull'ipotenusa di un triangolo rettangolo è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.

IPOTESI *ABC è un triangolo rettangolo; Q_a e Q_b sono i quadrati costruiti sui cateti a e b; Q è il quadrato costruito sull'ipotenusa del triangolo*



[3] Nel seguito sono riportati gli estratti dai testi in esame.

TESI $Q=Q_a+Q_b$

DIMOSTRAZIONE

COSTRUZIONE PRELIMINARE

Costruiamo il quadrato di lato $a+b$, cioè il quadrato che ha come lato la somma dei cateti del triangolo in fig. 13.1. Poi scomponiamo tale quadrato in due modi diversi, come indicato nelle figure 13.2 e 13.3.

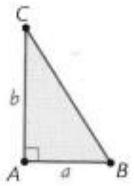


Figura 13.1 Triangolo rettangolo originario, di cateti *a* e *b*.

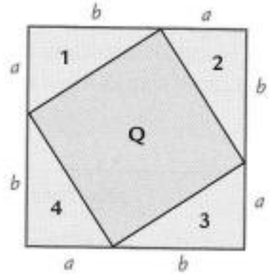


Figura 13.2 Il quadrato è stato scomposto nei quattro triangoli rettangoli indicati con **1**, **2**, **3** e **4** e nel quadrato verde.

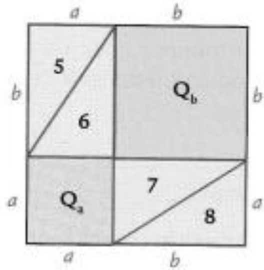


Figura 13.3 Il quadrato è stato scomposto nei quattro triangoli rettangoli congruenti indicati con i numeri **5**, **6**, **7** e **8**, e nei due quadrati colorati in rosa e in azzurro.

Essendo tra loro congruenti i due quadrati di lato $a+b$ nelle figure 13.2 e 13.3, così come sono tra loro congruenti i quattro triangoli rettangoli della prima figura e i quattro triangoli rettangoli della seconda, saranno uguali le aree delle figure che si ottengono per sottrazione. Pertanto: $Q=Q_a+Q_b$

In questa pagina riscontriamo che la forma semiotica è quella degli indici e della rappresentazione grafica mirata a facilitare la comprensione e l'interpretazione. Gli indici in particolare, rappresentati dalle lettere sulle figure guidano il lettore permettendogli di seguire con lo sguardo il modo in cui i triangoli rettangoli cambiano posizione all'interno del quadrato.

Lo vediamo quindi come un testo che mira a non proporsi come "duro" da un punto di vista tecnico ma che al tempo stesso non facilita l'elaborazione dei contenuti astratti con il linguaggio e con l'esemplificazione (metafore ed esempi sono entrambi assenti).

Anna Montemurro, *Math Genius*

Il teorema di Pitagora è stato dimostrato in molti modi. Tra i tanti ne illustreremo due, presentandoli come prove pratiche che potrai eseguire a casa oppure a scuola con la guida del tuo insegnante.

Prima dimostrazione. Su un foglio di compensato disegna i quadrati costruiti sui lati di un triangolo rettangolo e ritagliali. Poi, servendoti di una bilancia elettronica, verifica che il peso del quadrato più grande è uguale al peso complessivo degli altri due.

Seconda dimostrazione. Su uno stesso cartoncino disegna:

- ✓ 9 triangoli rettangoli congruenti;
- ✓ 1 quadrato Q avente il lato uguale all'ipotenusa di uno dei triangoli;
- ✓ 1 quadrato Q_1 avente il lato uguale al cateto minore di uno dei triangoli;
- ✓ 1 quadrato Q_2 avente il lato uguale al cateto maggiore di uno dei triangoli.

Colora i triangoli tutti con uno stesso colore e i quadrati con colori diversi, quindi ritagliali e disponili come nelle figure sottostanti.

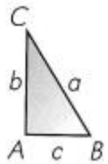


figura 1

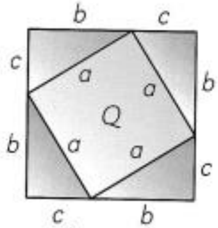


figura 2

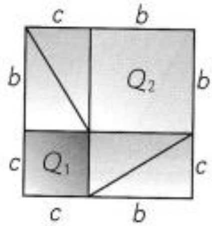
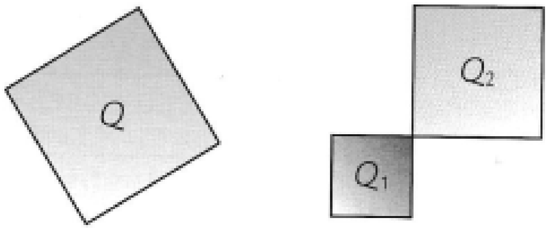


figura 3

Osserva che:

- ✓ i quadrati delle figure 2 e 3 sono congruenti perché entrambi hanno il lato uguale alla somma dei cateti *b* e *c* del triangolo della figura 1;

- ✓ togliendo da ciascun quadrato congruente i quattro triangoli rettangoli congruenti, si ottengono il quadrato Q, nel caso della figura 2, e i quadrati Q_1 e Q_2, nel caso della figura 3;
- ✓ le figure ottenute, rappresentate de Q e da Q_1+Q_2, sono equivalenti perché differenze di figure congruenti.



Abbiamo quindi dimostrato che $Q=Q_1+Q_2$.

Qui la forma semiotica facilita meno, rispetto all'esempio precedente, la gestione dell'astrazione: infatti, è stata fatta la scelta di non collegare il nome del quadrato (ad esempio, Q_1) a quello del cateto corrispondente (nell'esempio, *a*). Cosa questa che, sul piano dei segni, costituisce un ostacolo in più per il lettore. Come nell'esempio precedente, anche qui sono assenti metafore. Diverso invece è l'approccio che è stato scelto con gli esempi: entrambi reali, ma di natura diversa. Quello della prima dimostrazione porta in sé, a nostro parere, una forzatura: è infatti sottinteso un ragionamento su peso, peso specifico e volume – quest'ultimo non ancora definito al lettore –, che invoca sì il "senso comune" ma che, al tempo stesso, travalica il senso geometrico bidimensionale del teorema. Quello della seconda è invece vicino e autentico per lo studente che ne è destinatario. Nella scuola secondaria di primo grado, alla quale il testo si rivolge, infatti è ancora prassi comune che le studentesse e gli studenti lavorino con forbici e cartoncino.
La pagina proposta è (involontariamente?) più impegnativa sul piano simbolico, non usa la leva del linguaggio figurato, mentre si spende sull'avvicinare il concetto ai lettori.

Emma Castelnuovo, *La matematica/La geometria*

Vi propongo questo esercizio: disegnate sul vostro quaderno a quadretti due quadrati uguali; scomponete uno di questi quadrati in due rettangoli uguali e in due quadrati (come è indicato nella figura 139) e l'altro in quattro triangoli rettangoli uguali (i cateti di ogni triangolo devono avere la lunghezza delle dimensioni dei rettangoli della figura precedente) e in un quadrato, come è indicato nella fig. 140

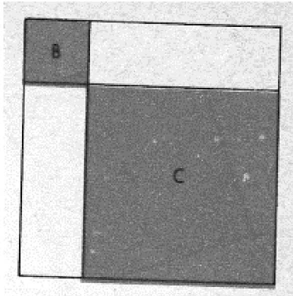


fig.139

Osservate bene i due rettangoli bianchi della fig. 139 e i quattro triangoli bianchi della 140. Che cosa si scopre?

È chiaro che i quattro triangoli equivalgono ai due rettangoli: basta, per vederlo bene, disegnare le diagonali dei rettangoli, come abbiamo fatto nella fig. 141.

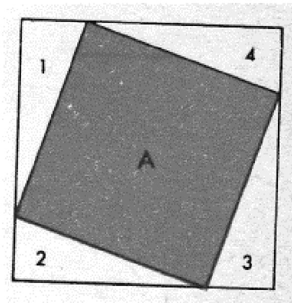


fig.140

E allora? Si può dire qualcosa dei quadrati scuri? Come è il quadrato A rispetto a B e a C?

Per arrivare alla scoperta vi suggerisco un'esperienza: metteteli sui piatti di una bilancia (fig. 142); è chiaro che c'è un perfetto equilibrio.

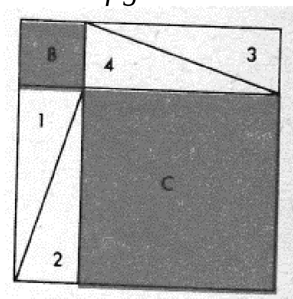


fig.141

Ora, tagliate via da uno dei quadrati i due rettangoli bianchi, e, dall'altro, i quattro triangoli bianchi; l'equilibrio dovrà rimanere perché ho tolto, da entrambi i piatti, delle figure uguali. Ma, se c'è sempre equilibrio, vuol dire che il quadrato A pesa come i quadrati B e C messi insieme; cioè il quadrato A ha la stessa area di B +C:

A=B+C

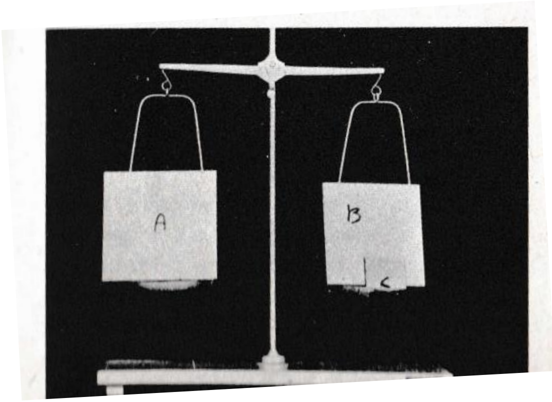


fig.142

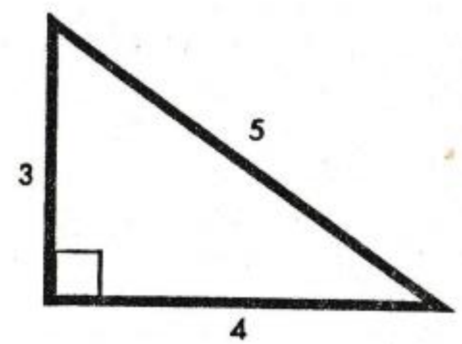
La trattazione proposta da Castelnuovo sceglie di azzerare quasi l'apparato simbolico e di proporre descrizioni puramente testuali della procedura da seguire passo a passo. È vero che una rappresentazione grafica è presente a lato, ma questa è "immersa" nel testo che discorsivamente vi fa riferimento in modo continuo.
Come per gli altri esempi non ci sono metafore, ma… la similitudine con la realtà è ugualmente fortissima, perché l'autrice *sostituisce la dimostrazione* con le istruzioni per *fare matematica con le mani* e questo è estremamente potente: i concetti vengono portati il più vicino possibile al lettore. E lo stesso ravvediamo nell'esempio finale: è vero che è il medesimo dell'esempio precedente, ma dove là c'erano seghetto e compensato, qui ci sono forbici e fogli da quaderno. Soffermiamoci un attimo su questi ultimi: è evidente che se pesiamo ritagli di foglio con una bilancia a due bracci probabilmente troveremo *sempre* l'equilibrio. Quello che l'autrice sta qui facendo è uno scarto di lato: dopo aver fatto effettivamente operare manualmente con forbici e carta, queste ultime righe invitano

a fare un esperimento mentale. Ed ecco che il processo illustrato è un tentativo (a nostro parere felice) di educazione all'astrazione, reso possibile grazie a un esempio vicino alla realtà degli alunni.
In questa pagina sono di fatto assenti i simboli, il linguaggio è naturalmente visivo e coinvolgente, l'esempio è fattivamente concreto (con una conclusione che invita ad astrarre).

Denis Guedj, *Il teorema del pappagallo*

«Bisogna dare a Cesare quel che è di Cesare», riprese Ruche, «e togliere a Pitagora quel che non è di Pitagora. Molto prima di lui, gli egizi e soprattutto i babilonesi avevano scoperto che esisteva un legame tra alcuni gruppi di tre numeri interi, e precisamente quello indicato dal famoso teorema.» Per non allungare troppo il proprio intervento, si astenne dal precisare che su una tavoletta babilonese, la tavoletta Plimpton 322, così chiamata dal nome dell'archeologo inglese che l'aveva scoperta, uno scriba aveva indicato una quindicina di gruppi di tre numeri interi per i quali valeva la regola che la somma del quadrato di due di essi era uguale al quadrato del terzo. La tavoletta era stata incisa oltre mille anni prima della nascita di Pitagora. Uno dei tre guppi era 44, 60, 75, che equivale al nostro 3, 4, 5.
Fece un segnala a Nofutur, che si drizzò sul posatoio, mentre Max si alzava. «Tre bastoncini di legno!» annunciò il pappagallo. Max prese i tre bastoncini di legno disposti sul tavolo e li presentò al pubblico.
Nofutur: «La lunghezza del primo è 3, del secondo 4, del terzo 5».
Max riportò tre volte la lunghezza della mano aperta sul pezzo di legno più piccolo, quattro volte su quello mediano e cinque sull'ultimo.
«E adesso che fanno, un'esibizione *live*?» brontolò Lea.
«Hanno fatto le prove», borbottò Jonathan. «Quando hanno potuto preparare questo numero da hostess?»
In effetti, Max aveva un sorriso vacuo e i suoi gesti meccanici somigliavano a quelli delle hostess che, in aereo, dopo il decollo, spiegano ai passeggeri il funzionamento della maschera a ossigeno e del giubbotto di salvataggio.

Nofutur proseguì: «Il quadrato di 3, che è 9, più il quadrato di 4, che è 16, danno come risultato il quadrato di 5, che è 25: il triangolo che ha come lati questi tre bastoncini è rettangolo!»
Mentre il pappagallo parlava, Max, con la punta dell'indice, scriveva nell'aria quello che Nofutur diceva: «$3^2+4^2=5^2$».
Poi unì i tre legnetti in modo che le estremità fossero a contatto, formando un triangolo perfettamente identico a una squadra.



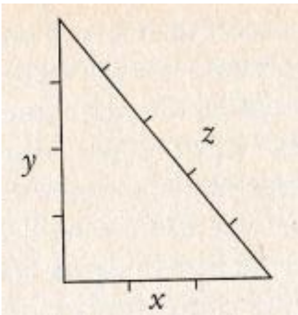
«Che cosa dice il teorema?» domandò il signor Ruche. «Esso ci spiega che esiste un rapporto fra la lunghezza dei lati e la natura del triangolo. E questo legame si può esprimere come segue: se la somma dei quadrati di due lati di un triangolo è uguale al quadrato del terzo, ossia: $a^2+b^2=c^2$, allora il triangolo è rettangolo. Esiste un rapporto molto stretto tra la lunghezza dei lati e la natura del triangolo.» Si riempì un bicchiere d'acqua, bevendolo poi lentamente.

Siamo passati a un testo divulgativo, un romanzo che include la matematica nella narrazione e che attraverso di questa la comunica, proprio nel senso di raccontare una storia e di delineare come la matematica procede. E si vede. I simboli sono assenti, le descrizioni sono puramente testuali e l'unico esempio presente è il caso studio del triangolo i cui cateti sono di 3 e 4 unità e la cui ipotenusa è di 5 unità. Il *contesto* della spiegazione è ben rappresentato dalla metafora dell'hostess: certo non è una metafora sulla matematica, ma su come si racconta un contenuto matematico "noto", ripetendo una sequenza di idee e nessi logici ben definiti e sedimentati nella mente del

narratore. Infine i bastoncini – per di più "maneggiati" dal pappagallo Nofutur – sono un esempio che avvicina il lettore alla costruzione del triangolo che, una volta costruito proprio con i legnetti, sarà ancora più sorprendentemente rettangolo.
Anche qui all'assenza dei simboli si affianca una metafora vicina al lettore e un esempio autentico e reale.

Simon Singh, *L'ultimo teorema di Fermat*

[…] la matematica richiesta per intendere il teorema di Pitagora è relativamente semplice. Per capirlo basta cominciare con il misurare la lunghezza dei due lati più corti (i cateti) di un triangolo rettangolo (x e y) e poi elevare al quadrato ognuno dei due (x^2, y^2). Sommate poi i due quadrati (x^2+y^2) per ottenere il risultato finale. Se calcolate il numero per il triangolo della figura 1, vedrete che è 25.



x=3, y=4, z=5

$x^2+y^2=z^2$

9+16=25

Ora potete misurare il lato più lungo, l'ipotenusa, ed elevare al quadrato la sua lunghezza. Il risultato notevole è che questo numero è identico a quello che avete appena calcolato, cioè, $5^2=25$. Vale a dire:

In un triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.

Ovvero, simbolicamente:

$$x^2+y^2=z^2$$

Questo è evidentemente vero per il triangolo mostrato nella figura 1, ma il fatto significativo è che il teorema di Pitagora è vero per ogni triangolo rettangolo che possiate immaginare. È una legge matematica universale e potete affidarvi a esso ogni volta che incontrate un triangolo con un angolo retto. Viceversa se avete un triangolo che obbedisce al Teorema di Pitagora, allora potete essere assolutamente certi che si tratti di un triangolo rettangolo.

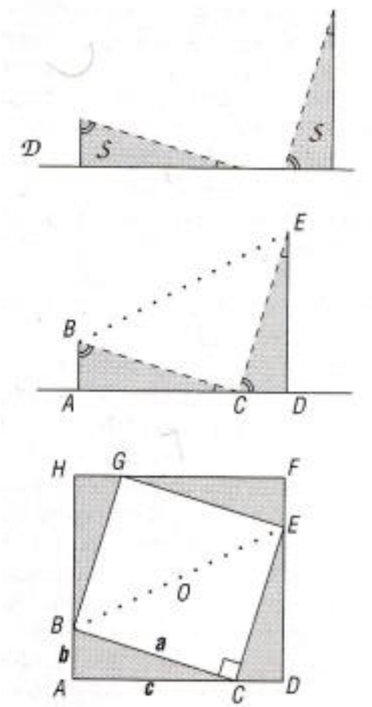
Questo secondo testo divulgativo usa i simboli in modo iconico per passare dal caso particolare al caso generale. Anche qui sono assenti le metafore e l'unico esempio è il caso studio presente anche nel testo precedente.

La scelta è di una trattazione asciutta che, senza sviluppare la dimostrazione, mira a comunicare in modo rigoroso il modo di esprimersi della matematica. Ci sentiamo di dire che sul piano linguistico l'obiettivo è di far cogliere la "situazione" nel modo più matematico possibile per il registro e il pubblico scelti dall'autore.

Stella Baruk, *Dizionario di matematica elementare*

Cerchiamo la relazione che intercorre tra l'ipotenusa e i cateti e a proposito consideriamo una squadra da disegno *S*: si disegni due volte la squadra, una volta "appoggiata su un cateto e un'altra volta sull'altro cateto (entrambe le volte appoggiata su uno stesso supporto D).

Se si rifà il disegno in modo che "le squadre" si tocchino in C, si ottiene una nuova figura nella quale l'angolo BCE è retto, essendo gli angoli ACB e ECD complementari, e i due lati BC e CE sono congruenti.



Poiché BCE è la metà di un quadrato, possiamo pensare che la relazione tra i lati del triangolo rettangolo si trovi usando come intermediarie delle aree: intanto l'area del trapezio ADEB è nota (si ottiene sommando le aree dei due triangoli congruenti e del nuovo triangolo) e inoltre, se raddoppiamo il trapezio, prendendo il suo *simmetrico* rispetto al punto medio O di BE, otteniamo un quadrato di lato noto, nel quale è *inscritto* ancora un quadrato.

Se indichiamo con a, b, c rispettivamente le lunghezze dei lati BC, AB e AC, la lunghezza del lato AD è b+a e l'area del quadrato ADFH è uguale a $(b+c)^2$.

D'altra parte, calcolata come somma di aree, è uguale a quella del quadrato di lato a, alla quale si aggiungono le aree dei quattro triangoli congruenti, ognuna delle quale vale $(b\times c)/2$, da cui:

$(b+c)^2=a^2+4(b\times c)/2$

$b^2+2bc+c^2=a^2+2bc$

$b^2+c^2=a^2$.

Il *Dizionario* sceglie di adottare come simbolismo indici, icone – che però si limitano alle lunghezze dei segmenti – e formule. Non ricorre a metafore e fa la scelta forte di non partire parlando di triangoli ma con l'esempio delle squadre, giocando la carta di un grande avvicinamento al lettore.

In conclusione, la proposta delle tre forme dell'astrazione (semiotiche, metaforiche ed esemplificative) non vuole andare nella direzione di prescrivere a chi comunica un livello alto, o viceversa basso, di astrazione, ma invita a fare nostra la consuetudine di analizzare la *qualità* dell'astrazione che mettiamo nei nostri testi (lezioni, corsi, libri) o in quelli che decidiamo di usare per la comunicazione della matematica nella quale siamo coinvolti da insegnanti o divulgatori.

Bibliografia

[Baruk 1999] Baruk S., *Dizionario di matematica elementare*, Zanichelli, 1999

[Benvenuti-Natalini 2017] Benvenuti S., Natalini R., *Comunicare la matematica: chi, come, dove, quando e, soprattutto, perché?!*, Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana Serie 1 2 (2017), fasc. n.2, p. 175-193

[Capozucca 2018] Capozucca A., *Comunicare la matematica*, AL1C3&B08, novembre 2018

[D'Amore 2001] D'Amore B. (2001). *Concettualizzazione, registri di rappresentazioni semiotiche e noetica*, La matematica e la sua didattica. 2, 150-173.

[Euler 2007] Euler L., *Lettere a una principessa tedesca*, Bollati Boringhieri, 2007

[Gouthier 2005] Gouthier D., *Linguaggio, simboli e matematica*, in La stella nova, Pitrelli N. & Sturloni G. (a cura di), Polimetrica, Milano, 2005, pp. 135-142

[Gouthier-Ioli 2006] Gouthier D., Ioli E., *Le parole di Einstein*, Edizioni Dedalo, 2006

[Gouthier-Salvador 2006] Gouthier D., Salvador M., *Modo simbolico, mondi possibili e matematica*, Bollettino U.M.I.- sez.A , La Matematica nella Società e nella Cultura Serie VIII, Vol.IX-A, aprile 2006, 65-88

[Lolli 2018] Lolli G., *Matematica come narrazione*, Il Mulino, 2018

[Maraschini-Palma 2013] Maraschini W., Palma M., *Enciclopedia della matematica*, Garzanti, 2013

[Mazur 2015] Mazur J., *Storia dei simboli matematici*, il Saggiatore, 2015

[Pizzulli 2020] Pizzulli O., *Raccontare l’astrazione*, tesi di Master in Comunicazione della Scienza “Franco Prattico”, Sissa, 2020